常微分方程

丁同仁　李承治

2019年秋

目　录

第一章　序言与基本概念

序言:

§1.1　微分方程及其解的定义

Definition 1.1.1. 设函数$y=\varphi(x)$在区间J上连续，且有直到n阶的导数。如果把$y=\varphi(x)$及其相应的各阶导数代入方程（*1.1*），得到关于x的恒等式，即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0$$

对一切$x\in J$都成立，则称$y=\varphi(x)$为微分方程（*1.1*）在区间J上的一个解。

例：自由落体。由牛顿第二运动定律$F=ma$，

$$m\ddot{y}=-mg,$$

$$\ddot{y}=-g,\quad (1.4)$$

这个方程很简单，右边与y无关。转化为求积分

$$\dot{y}=-gt+C_1,\quad (1.5)$$

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2,\quad (1.6)$$

确定一个具体的自由落体运动，需要确定它的**初值条件**

$$y(0)=y_0,\quad y'(0)=v_0.\quad (1.7)$$

此时要求$C_2=y_0,C_1=v_0$。因此得到唯一确定的解

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0.\quad (1.8)$$

由于n阶ode求解过程积分n次，另一方面它有n个初值条件，一个n阶微分方程的通解包含n个独立的任意常数（严格的证明见第十章）。所以有如下定义。

Definition 1.1.2. 设n阶微分方程（*1.1*）的解

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)\quad (1.3)$$

包含n个独立常数$C_1, C_2, \cdots, C_n$，则称它为通解。这里所说的n个任意常数$C_1, \cdots, C_n$是独立的，其含义是$Jacobi$行列式

$$\frac{D[\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)}]}{D[C_1, C_2, \cdots, C_n]} := \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

这里$C_1, \cdots, C_n$是参数，给出了解空间的维数。如果微分方程（1.1）的解$y = \varphi(x)$不包含任意常数，则称它为特解。

【附注】通解一般未必是方程所有的解，还有可能有奇解。这涉及到初值问题的解的唯一性问题。将在第四章讨论奇解、解的包络。

n阶微分方程（1.1）的初值条件的一般提法是

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (1.10)$$

其中$y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$是未知函数及其相应导数所取定的初值。

不失一般性，考虑微分方程（标准形式）初值问题

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (1.11)$$

我们关心函数F满足什么条件时，它的解是否存在，是否唯一？这是常微分方程理论中的一个基本问题。在第三章中将对$n = 1$的情形证明如下结果：只要F是连续的，则初值问题（1.11）的解是（局部）存在的，而且将在某些附加条件下证明解的存在性和唯一性。在第五章我们再把这些结果进一步推广到$n \geq 2$的情形。

除了初值条件，另外一种常见的定解条件（参看第五章的悬链线之例）

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}, \quad y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2.$$

在第九章中将介绍边值问题（Sturm-Liouville边值问题）。

n阶微分方程通解定义中关于n个任意常数的独立性：n个独立常数$C_1, \cdots, C_n$的取值使得n阶微分方程解的初值$\varphi(x, C_1, \cdots, C_n), \cdots, \varphi^{(n-1)}(x, C_1, \cdots, C_n)$具有（局部）映满的性质：即邻近$(y^{(k-1)}(x_0, C_\alpha^0) = \varphi^{(k-1)}(x_0, C_\alpha^0) = a_k^0, k = 1, \cdots, n)$的初值$(a^k)$（以及相应的解）都可以选$(C_\alpha)$使得$\varphi^{(k-1)}(x_0, C_\alpha) = a_k$。（这是因为从参数$C$到初值$A = \varphi^{(k-1)}(x_0, C)$的切映射在$C_0$处是满秩的。）我们可以从隐映射定理的角度来证明。

Theorem 1.1.3. 隐映射定理【数学分析教程上册定理*9.7.1*】: 设开集$D \subset \mathbb{R}^{m+n}(A, C), F: D \to \mathbb{R}^n$，这里$A = (a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^m, C = (c_1, \cdots, c_n)$

$F = (F_\alpha(A, c_1, \cdots, c_\beta, \cdots, c_n))$ 满足如下条件:

（a）$F \in C^1(D)$;

（b）有一点$(A^0, C^0) \in D$，使得$F(A^0, C^0) = 0$;

（c）行列式$\det J_C F(A^0, C^0) = \frac{D[F_1, \cdots, F_n]}{D[c_1, \cdots, c_n]}(A^0, C^0) \neq 0$。

那么存在(A^0, C^0)的一个邻域$G \times H$，使得对每个$A \in G$，方程$F(A, C) = 0$有唯一的解，记为$C = f(A)$；并且$C^0 = f(A^0)$，$f \in C^1(G)$。

现在设$y = \varphi(x, C_1, \cdots, C_n)$是方程（1.1）的通解，则利用初值条件（1.10）可以在局部上选取其中的任意常数$C_1, \cdots, C_n$的具体取值得到初值问题（1.1）+（1.10）的解。注意到Jacobi行列式非零，考虑

$$F_k(a_1, \cdots, a_n, C_1, \cdots, C_n) := \varphi^{(k-1)}(x_0, C) - a_k = 0, \quad k = 1, \cdots, n$$

其中x_0固定。给定$C^0 = (C_\alpha^0)$以及$A^0 = (a_k^0)$满足上述初始条件之后，由隐映射定理，(a_k^0)邻近的A都有唯一解$C = f(A)$。由此从初值A唯一确定了参数C。

作业：2（求解），3（求方程），4（求方程的一般证明）

回顾：通解中n个任意常数的独立性：设$y=\varphi(x,C_1,\cdots,C_n)$是方程（1.1）

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \quad (1.1)$$

的通解，取定$x_0\in J$以及参数$C^0=(C_1^0,\cdots,C_n^0)$，则得到一个特解，它满足的初值条件为

$$y(x_0)=a_1^0:=\varphi(x_0,C^0),\quad y'(x_0)=a_2^0:=\varphi'(x_0,C^0),\quad \cdots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=a_n^0:=\varphi^{(n-1)}(x_0,C_0). \quad (1.10)$$

独立性使得我们可以利用隐映射定理，从而根据$A^0=(a_1^0,\cdots,a_n^0)$某邻域内的$A=(a_1,\cdots,a_n)$来选取任意常数$C=(C_1,\cdots,C_n)$的取值使得初值A被取到，即$a_k=\varphi^{(k-1)}(x_0,C)$。因此，有特解满足初值为$A$。

事实上，考虑

$$F_k(a_1,\cdots,a_n,C_1,\cdots,C_n):=\varphi^{(k-1)}(x_0,C)-a_k=0,\quad k=1,\cdots,n$$

其中x_0固定。给定C^0以及A^0满足上述初始条件之后，由隐映射定理，A^0邻近的A都有唯一解$C=f(A)$。由此从初值A唯一确定了参数C。

第二章　初等积分法

§2.1　恰当方程

考虑对称形式的一阶微分方程

$$\alpha := P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \quad (2.1)$$

即一阶拟线性微分方程

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0. \quad (2.1')$$

（2.1'）其实是一阶方程的一个标准形式，很一般了，例如包含一阶线性方程。通常我们是不会具体求解的。我们写成形式（2.1）来考虑它的原因是因为它是一阶方程很几何的一个形式。

我们把自变量和因变量所在的空间联合在一起：$(x,y) \in \mathbb{R}^2$，求解（2.1）也可看作是求xy平面上（一族）曲线$\gamma_C \subset \mathbb{R}^2$，记（其中任一条）曲线$\gamma_C$的切空间为$\{\mathbb{R}T\}$，使得$\theta(T) = 0$。此时称$\gamma_C$为$\theta$的积分曲线（族）。通常积分曲线$\gamma_C$由$\Phi(x,y) = C$给出（从$y = g(x,C)$解出$C = \Phi(x,y)$）。

如下，我们形式地说明曲线$\gamma := \{y = \varphi(x)\}$为一条积分曲线当且仅当$y = \varphi(x)$是（2.1'）的解。注意到$\gamma$有切向量$T = \partial_x + \varphi'(x)\partial_y$，因此$\gamma$为积分曲线当且仅当

$$P + Q\varphi'(x) = 0,$$

即$y = \varphi(x)$满足（2.1'）。

【高阶常微分方程的标准形式$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$也可以表示成求$n$个1-形式的积分曲线：令$y_k = y^{(k-1)}, k = 1, 2, \cdots, n$，则对应的$n$个1-形式为

$$dy_1 = y_2, \cdots, dy_{n-1} = y_n dx, \quad dy_n = f(x, y_1, \cdots, y_n)dx.$$

1阶常微分方程组的标准形式$y_k' = f_k(x, y_1, \cdots, y_n), k = 1, 2, \cdots, n$的求解也可以表达成求$n$个1-形式的积分曲线：

$$dy_k = f_k(x, y_1, \cdots, y_n)dx, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

S. Lie与E. Cartan有一般理论通过微分形式来研究微分方程。】

所以求解（2.1'）可转化为求α的积分曲线。虽然容易看到积分曲线经过一个点时有切向$(-Q, P)$，但是一般不能够解出。能求解的一个情形：如果存在一个可

微函数$\Phi(x,y)$使得它的全微分

$$d\Phi(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

即

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q(x,y), \quad (2.2)$$

时，由$\Phi(x,y) = C$定义的曲线为$\alpha = 0$的积分曲线。事实上，曲线$\Phi(x,y) = C$有切向量$T = -\Phi_y\partial_x + \Phi_x\partial_y$，从而$\alpha(T) = 0$。

定义：如果存在一个可微函数$\Phi(x,y)$使得它的全微分$d\Phi = \alpha = Pdx + Qdy$，则称（2.1）为恰当方程或全微分方程，称$\Phi(x,y) = C$为（2.1）的一个通积分（通解）。

Proposition 2.1.1. *设$\Phi(x,y)$满足（2.2），则由*

$$\Phi(x,y) = C \quad (2.3)$$

确定的隐函数$y = y(x)$（或$x = x(y)$）为方程（2.1）的解。

证明：仅考虑y作为自变量x的函数的情形。由$\Phi(x,y(x)) = C$对x求导可得

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0.$$

□

一般情况下，我们需要解决的问题是：

（1）如何判断一个给定的微分方程是或者不是恰当方程？

（2）当它是恰当方程时，如何求出通积分？

（3）当它不是恰当方程时，能否将它的求解问题转化为一个与之相关的恰当方程的求解问题？

下面的定理对问题1和2给出了完满的解答。至于问题3，则是贯穿本章随后各节的一个中心问题（2.2-2.4节就若干特殊类型的方程给出针对性的解答，2.5节给出一个较为一般但不完整的解答）。

Theorem 2.1.2. *设函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$在区域*

$$R : \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$$

上连续，且有连续的一阶偏导数P_y, Q_x。则微分方程（2.1）是恰当方程当且仅当

$$P_y = Q_x \quad (2.4)$$

在R内成立。而且当（2.4）成立时,（2.1）的通积分为（同一个）

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C, \quad (2.5)$$

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C, \quad (2.6)$$

其中(x_0, y_0)是R中任意取定的一点。

证明：必要性：设（2.1）为恰当方程，则存在$\Phi(x,y)$使得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y). \quad (2.7)$$

再求偏导可得

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (2.8)$$

由P_y, Q_x的连续性假设可知混合偏导数$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}$和$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$ 是连续的，从而$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$。因此,（2.4）成立。

【事实上，$0 = dd\Phi = (-P_y + Q_x)dx \wedge dy$】

充分性：设P, Q满足（2.4），我们需要构造可微函数$\Phi(x,y)$使得（2.7）式成立。为了使（2.7）的第一式成立，我们取（下面任意固定一点$(x_0, y_0) \in R$）

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \psi(y), \quad (2.9)$$

其中$\psi(y)$待定，以使Φ满足（2.7）的第二式。因此由（2.9）可得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} P(x,y)dx + \psi'(y).$$

利用假设条件（2.4）得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)dx + \psi'(y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \psi'(y).$$

由此，为使（2.7）的第二式成立，只要令$\psi'(y) = Q(x_0, y)$，即

$$\psi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

即可。这样，就找到了满足（2.7）的一个函数

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy. \quad (2.10)$$

即$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$沿着折线路径$\gamma:(x_0,y_0)\to(x_0,y)\to(x,y)$的积分。

如果在构造$\Phi(x,y)$时，先考虑使（2.7）的第二式成立，则得到满足（2.7）的另一函数

$$\widetilde{\Phi}(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy. \quad (2.11)$$

即$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$沿着折线路径$\gamma:(x_0,y_0)\to(x,y_0)\to(x,y)$的积分。其实也可以直接对（2.11）求偏导数得到（2.7）。

因此，我们得到通积分（2.5）或者（2.6）。注意，$\Phi(x,y)$和$\widetilde{\Phi}(x,y)$的全微分相同，所以它们之间只差一个常数。再由$\Phi(x_0,y_0)=\widetilde{\Phi}(x_0,y_0)=0$可知$\Phi(x,y)\equiv\widetilde{\Phi}(x,y)$。

【事实上R单连通，α恰当当且仅当它是闭合的，即$d(Pdx+Qdy)=(-P_y+Q_x)dx\wedge dy=0$。而且当$d\alpha=0$时，给定$(x_0,y_0),(x,y)\in R$，设$\sigma$为从$(x_0,y_0)$到$(x,y)$的可微曲线，则积分$\int_\sigma\alpha$不依赖于$\sigma$的选取。】 □

总结：给定微分方程

$$Q(x,y)y'+P(x,y)=0$$

判断它是否为恰当方程即验证$P_y=Q_x$（即$d(Pdx+Qdy)=0$）是否成立，若成立，然后可通过积分$\int\alpha$来确定通积分$\Phi(x,y)$。从而$\Phi(x,y)=C$就是微分方程（2.1）的解。

求解恰当方程的关键是构造相应全微分的原函数$\Phi(x,y)$。这实际上就是场论中的位势问题。条件（2.4）等价于$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$是一个闭合的1-形式，从而在单连通区域R上恰当，即$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=d\Phi(x,y)$。由Stokes定理，闭合1-形式$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$的曲线积分

$$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}[P(x,y)dx+Q(x,y)dy] \quad (2.14)$$

与积分的路径无关。因此，（2.14）唯一确定了一个（单值）函数$\Phi(x,y)$。

如果区域不是单连通的，那么积分与路径有关。此时，一般的$\Phi(x,y)$是多值的。例如对于方程

$$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0,\quad x^2+y^2\neq0$$

条件（2.4）在非单连通环域$R_0:x^2+y^2>0$上成立。由

$$d(\arctan\frac{y}{x})=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

我们得到方程的解

$$\arctan\frac{y}{x}=C.$$

这里$\Phi(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$在$R_0$上是一个多值函数【逆时针围绕原点每转一圈回来多了$2\pi$】。当然，原方程的解为$y = ax$及$x = 0$。

【例5.】$(t^2+1)\cos udu + 2t\sin udt = 0.$

解：$P_t = 2t\cos u = Q_u$，求$\Phi(u,t)$使得

$$\Phi_u = (t^2+1)\cos u, \quad \Phi_t = 2t\sin u,$$

由前者，

$$\Phi(u,t) = (t^2+1)\sin u + f(t),$$

由后者，取$f(t) = 0$，因此

$$\Phi(u,t) = (t^2+1)\sin u = C.$$

【例6.】$(ye^x + 2e^x + y^2)dx + (e^x + 2xy)dy = 0.$

解：$P_y = e^x + 2y = Q_x$。找$\Phi(x,y)$使得

$$\Phi_x = ye^x + 2e^x + y^2, \quad \Phi_y = e^x + 2xy,$$

由后者

$$\Phi = ye^x + xy^2 + f(x),$$

由前者$f(x) = 2e^x$，因此

$$\Phi(x,y) = ye^x + xy^2 + 2e^x = C.$$

作业：7，9，10

回顾：设$(x,y)\in R$，$R\subset\mathbb{R}^2$为单连通区域。

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

为恰当方程（或全微分方程），即存在$\Phi(x,y)$使得$d\Phi=Pdx+Qdy$时，$\Phi(x,y)=C$为通解。

判断是否为恰当方程的等价条件：

$$P_y=Q_x.$$

通积分

$$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(Pdx+Qdy)=C.$$

§2.2 变量分离方程

如果微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \quad (2.15)$$

中P,Q均可表示成x的函数与y的函数的乘积，则称（2.15）为变量分离的方程。此时，记

$$P(x,y)=X(x)Y_1(y), \quad Q(x,y)=X_1(x)Y(y),$$

因此变量分离的方程可以写成如下的形式

$$X(x)Y_1(y)dx+X_1(x)Y(y)dy=0. \quad (2.16)$$

（2.16）未必为恰当方程。如果两边除以因子$X_1(x)Y_1(y)$，则得到

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+\frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy=0. \quad (2.19)$$

它是恰当方程（$P_y=Q_x=0$），其通积分为

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+\int\frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy=C. \quad (2.20)$$

注意，我们化为形式（2.19）求解，是先在直线集合$\{X_1(x)Y_1(y)=0\}$以外求解（2.16），需要补上如下形式的特解（如果它们不包含在通积分之内）：

$x=a_i$，a_i是$X_1(x)=0$的根；$y=b_j$，b_j是$Y_1(y)=0$的根。

求解方法：先观察一阶微分方程是否可变形为变量分离的形式，然后积分：

例(3) $\frac{dy}{dx}+y^2\sin x=0$

解：当$y\neq 0$时，

$$-\frac{dy}{y^2}=\sin x dx,$$

即

$$d(\frac{1}{y})=d(-\cos x)$$

因此通积分为$\frac{1}{y}=-\cos x-C$，即

$$y(\cos x+C)+1=0.$$

另有特解$y=0$。

【例3】物体在空气中降落的速度问题（考虑空气阻力）。

假设质量为m的物体在空气中下落，空气阻力与物体速度的平方成正比，阻尼系数为$k>0$。沿垂直水平地面向下的方向取定坐标轴x，由牛顿第二运动定律推出微分方程

$$m\ddot{x}=mg-k\dot{x}^2.$$

这是一个二阶方程，但其中不显含未知函数x，而且我们关心的速度。记$v=\dot{x}$，则方程变为

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{k}{m}v^2,\quad v>0.\quad (2.25)$$

这是一个变量分离的方程。上式右端不为零时，

$$\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=dt,$$

积分可得通解

$$v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{Ce^{2at}+1}{Ce^{2at}-1},\quad t\geq 0,\quad (2.26)$$

其中$a=\sqrt{kg/m}$，C为任意常数。当（2.25）右端为零时，有特解$v=\sqrt{mg/k}:=b$。常数C可由初值条件$v(0)=v_0$确定，

$$C=(v_0+\sqrt{\frac{mg}{k}})(v_0-\sqrt{\frac{mg}{k}})^{-1}.$$

所以当$v_0<b$时，$C<-1$，一直加速到b。当$v_0>b$时，$C>1$，一直减速到b。

例【习题4】跟踪问题：设某A从Oxy平面上的原点出发，沿x轴正方向前进；同时某B从$(0,b)$开始跟踪A，即B的运动方向永远指向A并与A保持等距$b>0$。试求B的光滑运动轨迹。

解：假设A的位置为$(a,0)$，B的位置为(x,y)，则此时

$$(x-a)^2+y^2=b^2,$$

$$x-a=-\sqrt{b^2-y^2},$$

又满足

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-a},$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{b^2-y^2}}.$$

解得(见积分表71)

$$x=\frac{b}{2}\ln\frac{b+\sqrt{b^2-y^2}}{b-\sqrt{b^2-y^2}}-\sqrt{b^2-y^2}.$$

作业：2-2：1（4，5，6，7），2（2，4），3（3），4

§2.3 一阶线性方程

本节讨论一阶线性方程（一般形式）

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \quad (2.28)$$

其中函数$p(x),q(x)$在区间$I=(a,b)$上连续。当$q(x)\equiv 0$时，方程（2.28）成为

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \quad (2.29)$$

（2.28）称为非齐次线性方程，（2.29）称为齐次线性方程。

先讨论齐次线性方程（2.29）的解法。这是一个变量分离的方程。$y=0$为特解。当$y\neq 0$时，（2.29）可改写为

$$\frac{dy}{y}+p(x)dx=0$$

因此积分得

$$\ln|y|+\int p(x)dx=C,$$

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C\neq 0.$$

特解对应上式中取$C=0$，因此（2.29）的通解为

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}=Ce^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}. \quad (2.30)$$

接下来求解非齐次线性方程（2.28）。可将它改写为

$$dy+p(x)ydx=q(x)dx. \quad (2.31)$$

即

$$(p(x)y-q(x))dx+dy=0.$$

这一般不是一个恰当方程，但我们可以尝试找一个乘法因子$\mu(x)$使得

$$\mu(x)(p(x)y-q(x))dx+\mu(x)dy=0$$

是恰当的，这当且仅当

$$P_y=\mu(x)p(x)=Q_x=\mu_x,$$

因此容易计算，可选取

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt},$$

从而需要求$\Phi(x,y)$使得

$$d\Phi = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}(p(x)y - q(x))dx + e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}dy.$$

由$\Phi_y = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$可令

$$\Phi(x,y) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}y + g(x),$$

因此

$$g'(x) = -e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}q(x),$$
$$g(x) = -\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt}q(s)ds.$$

所以有通积分

$$e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}y - \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt}q(s)ds = C,$$

方程（2.31）的通解为

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}(\int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt}ds + C). \quad (2.32)$$

其中C是一个任意常数。或

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{s}^{x} p(t)dt}ds. \quad (2.33)$$

利用这种形式，容易得到初值问题

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.34)$$

的解为

$$y = y_0e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{s}^{x} p(t)dt}ds \quad (2.35)$$

其中$p(x), q(x)$在区间I上连续。

上述方法叫作积分因子法。这是因为我们有因子$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$乘以方程（2.31）之后，它就转化为一个全微分方程，从而获得它的积分。解的表达式们并不好记，通常我们先求出积分因子$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$，化原方程为恰当方程再求解该恰当方程的通积分。即重复以上证明过程。

{求解线性微分方程（2.28）还有另一个重要方法——常数变易法，见本节习题4。我们将在章节6.3就高阶线性微分方程的情形详细介绍这个方法。常数变易法：齐次线性方程的解为

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt},$$

假设（2.28）有如下形式的解

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt},$$

代入（2.28）得

$$C'(x) = q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt},$$

因此

$$C(x) = C + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds.\}$$

例1（2）$\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sin(2x)$

解：$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$，可取积分因子

$$\mu(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

因此

$$\frac{dy}{\cos x} + \frac{y\sin x}{\cos^2 x}dx = 2\sin x dx,$$

$$d(\frac{y}{\cos x}) = -2d\cos x,$$

$$\frac{y}{\cos x} + 2\cos x = C,$$

$$y = C\cos x - 2\cos^2 x.$$

【例】牛顿冷却法则：

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - E(t)),$$

其中$T(t)$为物体t时刻的温度，$E(t)$为外部环境的温度，$k > 0$为常数（与外部环境的散热性能有关）。

解：

$$T'(t) + kT(t) = kE(t).$$

选取积分因子

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{kt},$$

则得到恰当方程

$$e^{kt}dT + ke^{kt}(T - E)dt = 0,$$

即

$$d(e^{kt}T) = ke^{kt}E(t)dt,$$

因此

$$e^{kt}T = C + k\int_0^t E(s)e^{ks}ds,$$

$$T(t) = e^{-kt}(C + \int_0^t E(s)e^{ks}ds).$$

性质1. 齐次线性方程（2.29）的解或者恒等于零，或者恒不等于零。

性质2. 线性方程的解是整体存在的，即方程（2.28）或（2.29）的任一解都在$p(x)$和$q(x)$ 有定义且连续的整个区间I上存在。

性质3. 齐次线性方程（2.29）的任何解的线性组合仍是它的解；齐次线性方程（2.29）的任一解与非齐次线性方程（2.28）的任一解之和是非齐次线性方程（2.28）的解；非齐次线性方程（2.28）的任意两解之差必是相应齐次线性方程（2.29）的解。

性质4. 非齐次线性方程（2.28）的任一解与相应齐次线性方程（2.29）的通解之和构成非齐次线性方程（2.28）的通解。

性质5. 线性方程的初值问题（2.34）的解存在且唯一。

【例3】RL串联电路：如图2-5所示，电感L,电阻R以及电源电压降E均为正的常数。求电键闭合后电路中的电流强度$i = i(t)$。

事实上，利用电学中的基尔霍夫定律，

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E. \quad (2.41)$$

有特解$i = E/R$。相应齐次线性方程的通解为$Ce^{-\frac{R}{L}t}$，其中C为任意常数。因此，利用性质4，（2.41）的通解为

$$i = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

由初始条件$i(0) = 0$确定常数可得

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

作业：1（3，4），2（2，4），3，4，5，6（选做）

§2.4 初等变换法

在前面几节中，我们已经介绍了对恰当方程、变量分离的方程和一阶线性方程的求解法。现在，凭借初等变换，我们来扩充可求解方程的范围。

下面介绍几个标准类型的微分方程，它们可以通过适当的初等变换（通常考虑一个新的未知函数，或新的自变量）转化为变量分离的方程或一阶线性方程。

例如：

$$y' = \cos(x - y).$$

可令$u = y - x$，则可化为变量分离的方程

$$u' = \cos u - 1.$$

§2.4.1 齐次方程

如果微分方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (2.43)$$

中的函数P, Q都是x, y的同次（例如m次）齐次函数，即

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^m Q(x, y), \quad (2.44)$$

则称方程（2.43）为齐次方程（这与上节的齐次线性方程不是一回事）。

因此形式上，我们要求解

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = -\frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})},$$

引入新变量u（然后求解$u(x)$）

$$u = \frac{y}{x}. \quad (2.45)$$

因此（2.43）有一个等价形式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(1, u)}{Q(1, u)} := \Phi(u) = \Phi(\frac{y}{x}).$$

因此，$u(x)$所满足的方程为

$$x\frac{du}{dx} = \Phi(u) - u,$$

它是一个变量分离/恰当的方程，可以直接求通积分。

齐次方程（2.43）的形式具有整体收缩不变性。反过来，如果一个方程具有收缩不变性，则

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=g(x,\frac{y}{x})=g(cx,\frac{y}{x}),\quad \forall c\neq 0,$$

即

$$\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x}).$$

【例，习题6】探照灯的反光镜（旋转曲面）应具有何种形状，才能使点光源发射的光束反射成平行线束？

解：点光源放置于原点，设曲面由曲线$y=y(x)$绕x轴旋转而成。则

$$\arctan(-\frac{1}{y'})-\arctan\frac{y}{x}=\pi-\arctan(-\frac{1}{y'}),$$

因此

$$\frac{-\frac{1}{y'}-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{xy'}}=\frac{1}{y'},$$

$$(y')^2+\frac{2x}{y}y'-1=0,$$

为简单起见，只需考虑x轴上方的半支：

$$y'=\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

于是

$$y'=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},\quad (1)$$

这是两个齐次方程。令$y=xu$，则（1）化为

$$(\frac{1}{u}+\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}})du=-\frac{dx}{x},$$

积分得

$$|x|(\sqrt{1+u^2}-1)=C>0,$$

$$y^2=2C(|x|+\frac{C}{2}).$$

这是朝两个方向开口的两个对称的抛物线。

【例，习题5】求一曲线，使得过这曲线上任意点的切线与该点向径的交角等于某固定角度γ。

解：设切线与x轴正向夹角为α，则

$$\tan\alpha=y',$$

定义β为向量(x,y)与x轴正向的夹角，则

$$\tan\beta = \frac{y}{x}.$$

设β逆时针旋转$\gamma = \alpha - \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$与$\alpha$重合，则

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \tan\gamma = \lambda,$$

即

$$\frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + y'\frac{y}{x}} = \lambda,$$

从而

$$y' = \frac{y+\lambda x}{x - \lambda y}.$$

令$u = y/x$，则

$$\frac{(1-\lambda u)du}{\lambda(u^2+1)} = \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{\lambda}\arctan u - \ln\sqrt{1+u^2} = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0,$$

$$|x|\sqrt{1+u^2} = Ce^{\frac{1}{\lambda}\arctan u},$$

以$u = y/x$代回上式，得到通积分

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\frac{1}{\lambda}\arctan(y/x)},$$

如果采用极坐标，则得简单形式

$$r = Ce^{\frac{\theta}{\lambda}}, \quad C > 0.$$

它是以原点为焦点的螺旋线。注意$\lambda = \infty$时，为圆周。θ可增可减，可正可负，λ可正可负。

等角螺线是由笛卡儿在1638年发现的。等角螺线（切向与极半径的夹角为常数）、对数螺线或生长螺线是在自然界常见的螺线，在极坐标系(r,θ)中，这个曲线可以写为

$$r = ae^{b\theta},$$

或

$$\theta = \frac{1}{b}\ln(r/a).$$

因此等角螺线又称为对数螺线。

【例4】讨论形如
$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l})$$
的方程的求解。

解：当$c=l=0$时，它是齐次方程。因此可用变换$u=y/x$化为变量分离的方程来求解。假设c,l不全为零，分两种情形来讨论：

（1）$\triangle=an-bm\neq 0$：此时可作平移
$$\xi=x+\alpha,\quad \eta=y+\beta,$$
使得
$$a\xi+b\eta=ax+by+c,\quad m\xi+n\eta=mx+ny+l.$$
因此原方程可化为
$$\frac{d\eta}{d\xi}=f(\frac{a\xi+b\eta}{m\xi+n\eta}),$$
这是齐次方程。令$u=\eta/\xi$，即变为变量分离的方程。

（2）$\triangle=an-bm=0$：此时有$\frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\lambda$，因此原方程化为
$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+l}),$$
令$v=ax+by$，则得到一个变量分离的方程
$$\frac{dv}{dx}=a+bf(\frac{v+c}{\lambda v+l}).$$

【例，习题2（3）】求解
$$(x^2+y^2+3)\frac{dy}{dx}=2x(2y-\frac{x^2}{y}).$$
解：方程可变形为
$$(x^2+y^2+3)\frac{ydy}{xdx}=4y^2-2x^2.$$
令
$$u=x^2,\quad v=y^2$$
则
$$\frac{dv}{du}=\frac{4v-2u}{u+v+3}.$$
令
$$\eta=v+1,\quad \xi=u+2,$$

则
$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{4\eta-2\xi}{\eta+\xi}.$$
令
$$\eta=t\xi,$$
则
$$\xi\frac{dt}{d\xi}=\frac{4t-2}{t+1}-t,$$
$$-\frac{d\xi}{\xi}=\frac{t+1}{(t-1)(t-2)}dt=\frac{3dt}{t-2}-\frac{2dt}{t-1},$$
$$\xi=C\frac{(t-1)^2}{(t-2)^3},\quad (1)$$
$$x^2=C\frac{(t-1)^2}{(t-2)^3}-2,\quad y^2=C\frac{t(t-1)^2}{(t-2)^3}-1.$$
或者由
$$t=\frac{\eta}{\xi}=\frac{y^2+1}{x^2+2},$$
代入（1）得
$$(x^2-y^2+1)^2=C(-2x^2+y^2-3)^3.$$

§2.4.2 伯努利方程

形如
$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n,\quad n\neq 0,1\quad (2.48)$$
的方程称为伯努利方程。以$(1-n)y^{-n}$乘以两边得
$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)y^{1-n}p(x)=(1-n)q(x).$$
然后令$z=y^{1-n}$，则
$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x),$$
这是关于未知函数z的一阶线性方程。

§2.4.3 里卡蒂方程(Riccati)

如下形式的方程
$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x),\quad (2.49)$$

其中p,q,r在区间I上连续，$p(x)$不恒为零，称为里卡蒂方程。若$r(x) = 0$，则是一个Bernoulli方程。

它在Bessel函数的研究中出现。这是形式上最简单的非线性方程。但是一般而言，它已不能用初等积分法求解。伯努利哥哥考虑如下的二阶线性微分方程

$$u''(t) + p(t)u(t) = 0.$$

令

$$y(t) = -\frac{u'(t)}{u},$$

则

$$y'(t) = y^2 + p(t).$$

对于$p(t) = t^2$，伯努利哥哥发现它的解是两个无穷级数的商。

对于一般二阶齐次线性方程

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0,$$

令

$$y(x) = \frac{u'}{u}, \quad u(x) = e^{\int_{x_0}^{x} y(s)ds},$$

则

$$y' + y^2 + p(x)y + q(x) = 0.$$

作业：1，2，4，5，6

§2.5 积分因子法

在本章2.1节中我们看到，若方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (2.55)$$

是恰当方程（即存在Φ使得$d\Phi = Pdx + Qdy$，在单连通域上当且仅当$P_y = Q_x$），则它的通积分为

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C.$$

通常更便捷的求通积分的方法是逐步求Φ使得

$$\Phi_x = P, \quad \Phi_y = Q.$$

在2.2-2.4中，我们还讨论了当（2.55）不是恰当方程时，如何把它转化为一个恰当方程并求解。

例如当（2.55）具有变量分离的形式

$$X(x)Y_1(y)dx + X_1(x)Y(y)dy = 0$$

时，用$\mu(x,y) = \frac{1}{X_1(x)Y_1(y)}$乘方程两侧，就得到一个恰当方程

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy = 0;$$

当（2.55）是一个一阶线性方程，即

$$dy + (p(x)y - q(x))dx = 0$$

时，用$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$乘以上式两侧，就得到一个恰当方程。

当（2.55）是一个齐次方程时，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{P(1,\frac{y}{x})}{Q(1,\frac{y}{x})},$$

引入新变量u（然后求解$u(x)$）

$$u = \frac{y}{x}. \quad (2.45)$$

化为等价形式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(1,u)}{Q(1,u)} := \Phi(u) = \Phi(\frac{y}{x}).$$

因此，$u(x)$所满足的方程为

$$x\frac{du}{dx} = \Phi(u) - u,$$

它是一个变量分离/恰当的方程，可以直接求通积分。其实也可以从积分因子的角度来求解。仍然引入$u = \frac{y}{x}$，则

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = x^m[P(1,u) + uQ(1,u)]dx + x^{m+1}Q(1,u)du.$$

这是变量分离形式的方程，有积分因子

$$\mu = \frac{1}{x^{m+1}[P(1,u) + uQ(1,u)]} = \frac{1}{xP(x,y) + yQ(x,y)}.$$

现在我们尝试将这种方法一般化：对一般的方程（2.55），设法找一个可微的非零函数$\mu = \mu(x,y)$，使得用它乘以方程（2.55）后，所得方程

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \quad (2.56)$$

成为恰当方程，即

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \quad (2.57)$$

这时，函数$\mu = \mu(x,y)$叫做方程（2.55）的一个积分因子。

问题是：对于给定的方程（2.55），它的积分因子是否一定存在？如果存在，它是否容易求得？事实上，寻求积分因子$\mu(x,y)$，就是求解偏微分方程（2.57），即

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = (P_y - Q_x)\mu. \quad (2.58)$$

以后我们将会知道，虽然理论上偏微分方程（2.58）的解是存在的，但它的求解又要归结到我们原来的方程（2.55）的求解（见第十一章）。因此，从（2.58）求出积分因子的表达式$\mu = \mu(x,y)$再去求解（2.55）一般是不可行的。然而，对某些特殊情形，利用（2.58）去寻求（2.55）的积分因子却是可行的。

例如，假设方程（2.55）有一个只与x有关的积分因子$\mu = \mu(x)$，则由充要条件（2.58）推出

$$Q\frac{d\mu}{dx} = (P_y - Q_x)\mu,$$

即

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{Q}(P_y - Q_x). \quad (2.59)$$

由于上式左端只与x有关，所以微分方程（2.55）有一个只依赖于x的积分因子的必要条件是：表达式

$$\frac{1}{Q}(P_y - Q_x) \quad (2.60)$$

只依赖于x，而与y无关。反之，设表达式（2.60）只依赖于x，记为$G(x)$。考虑到（2.59）式，我们令

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx} = G(x),$$

由此得到

$$\mu(x) = e^{\int G(x)dx}, \quad (2.61)$$

容易看到$\mu(x)$满足（2.58），因此它是（2.55）的一个积分因子。即

Theorem 2.5.1. *定理2.4. 微分方程（2.55）有一个只依赖于x的积分因子的充要条件是：表达式（2.60）只依赖于x，而与y无关；而且若把表达式（2.60）记为$G(x)$，则由（2.61）所示的函数$\mu(x)$是方程（2.55）的一个积分因子。*

类似的，可以得出下面平行的结果：

Theorem 2.5.2. *定理2.5. 微分方程（2.55）有一个只依赖于y的积分因子的充要条件是：表达式*

$$\frac{1}{P}(P_y - Q_x) = -H(y)$$

只依赖于y；而且此时函数$\mu(y) = e^{\int H(y)dy}$是方程（2.55）的一个积分因子。

所以，主要看

$$\frac{P_y - Q_x}{Q}, \frac{P_y - Q_x}{P}$$

是否为只含x（只含y）的函数？

【例】一阶线性微分方程

$$(p(x)y - q(x))dx + dy = 0.$$

则$P_y - Q_x = p(x)$，$(P_y - Q_x)/Q = p(x)$，只与x有关，有积分因子$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$。

【例，习题1（2）】求解

$$ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0.$$

解：

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x,$$

即

$$(P_y - Q_x)\mu = Q\mu_x - P\mu_y,$$

计算得

$$P_y - Q_x = 1 - 2y, \quad \frac{P_y - Q_x}{P} = \frac{1-2y}{y},$$

因此有只依赖于y的积分因子$\mu(y)$：

$$\frac{\mu_y}{\mu} = -\frac{P_y - Q_x}{P} = -\frac{1}{y} + 2,$$

因此可取积分因子

$$\mu(y) = \frac{1}{y}e^{2y},$$

另外，注意到有特解$y = 0$。从而

$$e^{2y}dx + (e^{2y}2x - \frac{1}{y})dy = 0,$$

$$\Phi_x = e^{2y},$$

$$\Phi(x, y) = xe^{2y} + f(y),$$

$$\Phi(x, y) = xe^{2y} - \ln|y|, \quad d\Phi = e^{2y}dx + (e^{2y}2x - \frac{1}{y})dy$$

通解为

$$xe^{2y} - \ln|y| = C.$$

分组求积分因子：

Theorem 2.5.3. *定理2.6. 若$\mu = \mu(x, y)$是方程（2.55）的一个积分因子，使得*

$$\mu Pdx + \mu Qdy = d\Phi(x, y),$$

则$\mu(x, y)g(\Phi(x, y))$也是（2.55）的一个积分因子，其中g是任一非零可微函数。其逆命题也成立。

证明：

$$g(\Phi)\mu Pdx + g(\Phi)\mu Qdy = d[(\int g)(\Phi)].$$

逆命题也成立：再设$\mu_1(Pdx+Qdy) = d\Psi$，则利用上述假设的两个通积分可知Jacobi行列式

$$\frac{D[\Phi, \Psi]}{D[x, y]} \equiv 0,$$

从而Ψ与Φ函数相关（即$\Psi = \Psi(\Phi)$）。因此，$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{d\Psi}{d\Phi}$可表示为$\Phi$的函数。 □

假设方程（2.55）的左端可以分成两组，即

$$(P_1dx + Q_1dy) + (P_2dx + Q_2dy) = 0,$$

其中第一组和第二组各有积分因子μ_1和μ_2，使得

$$\mu_1(P_1dx + Q_1dy) = d\Phi_1, \quad \mu_2(P_2dx + Q_2dy) = d\Phi_2.$$

由定理2.6可见，对任意可微函数g_1, g_2，函数$\mu_1 g_1(\Phi_1)$是第一组的积分因子，而函数$\mu_2 g_2(\Phi_2)$是第二组的积分因子。因此，如果能适当选取g_1, g_2使得$\mu_1 g_1(\Phi_1) = \mu_2 g_2(\Phi_2)$，则$\mu = \mu_1 g_1(\Phi_1)$就是方程（2.55）的一个积分因子。

【例，习题1（7）】求解

$$y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0.$$

$$P_y - Q_x = 3y^2 - (4x - 2y^2) = 5y^2 - 4x.$$

考虑分组

$$(y^3dx - 2xy^2dy) + 2x^2dy = 0,$$

后者有积分因子$\mu_2 = x^{-2}$。前者

$$\frac{P_y - Q_x}{P} = \frac{5}{y} = -\frac{\partial_y \mu_1}{\mu_1},$$

$$\mu_1 = y^{-5}.$$

从而

$$\mu_1(y^3dx - 2xy^2dy) = d(xy^{-2}), \quad \mu_2 2x^2dy = d(2y),$$

找g_1, g_2使得

$$\mu_1 g_1(xy^{-2}) = \mu_2 g_2(2y),$$

即

$$y^{-5}g_1(xy^{-2}) = x^{-2}g_2(2y).$$

因此有积分因子

$$\mu = x^{-2}y^{-1}.$$

有特解$x = 0$和$y = 0$。另外，乘以积分因子μ，积分得

$$-x^{-1}y^2 + \ln y^2 = C.$$

作业：1（3，4，6，7），4

§2.6 应用举例

【例，习题4】追线：设在Oxy平面上，有某物$P(t) = (at, 0), a > 0$。$Q(0) = (0, 1)$，Q的速度为$b > a$。并且Q的运动方向始终指向P，即

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{x - at}{y}.$$

求Q的轨迹，以及追上P的时间。

解：由方程求得

$$at = x - y\frac{dx}{dy},$$

因此，

$$a = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dy} - y\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dy}).$$

注意到

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}},$$

因此令

$$h(t) = \frac{dx}{dy} < 0,$$

则

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{y} < 0.$$

因此

$$\begin{aligned} dh(t) &= -\frac{a}{by}bdt = -\frac{a}{by}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = -\frac{a}{by}\sqrt{1 + h^2}|\dot{y}|dt \\ &= \frac{a}{by}\sqrt{1 + h^2}dy \end{aligned}$$

即

$$\frac{dh}{\sqrt{1 + h^2}} = \frac{a}{b}\frac{dy}{y},$$

积分得

$$\ln(h + \sqrt{1 + h^2}) = d\ln y^{\frac{a}{b}} + C_1,$$

由$h(0) = 0, y(0) = 1$，得

$$h + \sqrt{1 + h^2} = y^{\frac{a}{b}},$$

求得

$$\frac{dx}{dy} = h = \frac{1}{2}(y^{\frac{a}{b}} - y^{-\frac{a}{b}}).$$

这是一个变量分离的方程。接下来积分并利用$x(0)=1$得

$$2x(y)=\frac{b}{a+b}(y^{1+\frac{a}{b}}-1)-\frac{b}{b-a}(y^{1-\frac{a}{b}}-1).$$

设相遇时刻为$t=T$，此时$x=aT, y=0$。因此$T=\frac{b}{b^2-a^2}$。

作业：3，4，5

第三章　存在性和唯一性定理

我们在第二章讨论了一阶微分方程的初等积分法，解决了几类特殊的方程。但是，我们也知道，对许多微分方程，例如形式上很简单的里卡蒂方程$y' = x^2 + y^2$，不能通过初等积分法求解。这就产生一个问题：一个不能用初等积分法求解的微分方程是否意味着没有解呢？或者说，一个微分方程的初值问题在何种条件下一定有解呢？当有解时，它的解是否唯一呢？毫无疑问，这是一个很基本的问题。不解决这个问题，对微分方程的进一步研究（无论定性还是定量）就无从谈起。

柯西（1789-1857）在19世纪20年代第一个成功地建立了微分方程初值问题解的存在和唯一性定理（因此，后人把初值问题称为柯西问题）。在1876年Lipschitz减弱了柯西定理的条件。而在1893年Picard用逐次逼近法在Lipschitz条件下对定理给出了一个新证明。此外Peano在更一般的条件下建立了柯西问题解的存在性定理（不顾及唯一性）。

本章主要介绍Picard定理和Peano定理，并介绍解的延伸和解的最大存在区间等有关问题。

§3.1　Picard存在性和唯一性定理

例：考虑初值问题$\frac{dy}{dx} = |y|^\alpha, y(0) = 0$（$|y|$避免$y < 0$时无定义），常数$\alpha > 0$。

解：$y \equiv 0$为一个解。$\alpha \in (0, 1)$时又有解

$$y = [(1-\alpha)x]^{\frac{1}{1-\alpha}}, x \geq 0; \quad y = -[-(1-\alpha)x]^{\frac{1}{1-\alpha}}, x \leq 0.$$

因此此时解不唯一。$\alpha \geq 1$解唯一。

本节将利用Picard的逐次迭代法证明微分方程初值问题解的存在性和唯一性定理。为此，我们首先介绍一个条件。设函数$f(x, y)$在区域D内满足不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

其中常数$L > 0$。则称函数$f(x, y)$在区域D内对y满足Lipschitz条件。

对于$f(x, y) = |y|^\alpha$，$\alpha \in (0, 1)$时在$y = 0$附近对y不满足Lipschitz条件，$\alpha \geq 1$时在局部对y满足Lipschitz条件。若函数$f(x, y)$在凸形区域D内对y有连续的偏微商（这是柯西当年建立微分方程初值问题解的存在性和唯一性定理时所假设的一个条件），并且D是有界闭区域，则$f(x, y)$在D内对y满足Lipschitz条件；反之，结论不一定正确。例如，$f(x, y) = |y|$对y满足Lipschitz条件，但当$y = 0$时它对y没有微商。

现在，我们要证明下述Picard定理。

Theorem 3.1.1. *定理3.1.* 设初值问题

$$(E) \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0,$$

其中$f(x,y)$在矩形区域

$$R : |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

内连续，而且对y满足*Lipschitz*条件。

则（E）在区间$[x_0 - h, x_0 + h]$上有并且只有一个解，其中常数

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, \quad M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|.$$

证明：为了突出思路，我们把证明分成以下四步：

（1）初值问题（E）等价于积分方程（$y = y(x)$为未知函数）

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \quad (3.1)$$

事实上，设$y = y(x)$ $(x \in I)$是（E）的解，则有

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I \quad (3.2)$$

和

$$y(x_0) = y_0. \quad (3.3)$$

由此，对恒等式（3.2）积分并利用初值条件（3.3），得到

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds, x \in I,$$

即$y = y(x)$是积分方程（3.1）的解。

反之，设$y = y(x), x \in I$是（3.1）的解，则对x求导得

$$y' = f(x, y(x)), x \in I; \quad y(x_0) = y_0.$$

即$y = y(x)$也是（E）的解。

因此Picard定理的证明等价于证明积分方程（3.1）在区间I上有且只有一个解。

（2）用逐次迭代法构造Picard序列

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))ds, \quad x \in I, \quad (3.4)$$

$(n = 0, 1, 2, \cdots)$，其中$y_0(x) \equiv y_0$。

当$n = 0$时，注意到$f(x, y_0(x))$是I上的连续函数，所以由（3.4）可见

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(x_0))ds, \quad x \in I$$

在I上是连续可微的，而且满足不等式

$$|y_1(x) - y_0| \le |\int_{x_0}^{x} |f(s, y_0(s))|ds| \le M|x - x_0|. \quad (3.5)$$

这就是说，在区间I上$|y_1(x) - y_0| \le Mh \le b$。

因此，$f(x, y_1(x))$在I上是连续的。所以由（3.4）可见

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds, \quad x \in I$$

在I上是连续可微的，而且满足不等式

$$|y_2(x) - y_0| \le |\int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s))|ds| \le M|x - x_0|,$$

从而，$|y_2(x) - y_0| \le Mh \le b$，$x \in I$。

由此类推，用归纳法不难证明：由（3.4）给出的Picard序列$y = y_n(x)$在I上是连续可微的，而且满足不等式

$$|y_n(x) - y_0| \le M|x - x_0|, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

（3）现在证明Picard序列$y = y_n(x)$在区间I上一致收敛到积分方程（3.1）的解。

注意，序列$y_n(x)$的收敛性等价于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[y_{n+1}(x) - y_n(x)] \quad (3.6)$$

的收敛性。下面证明级数（3.6）在I上是一致收敛的。为此，我们用归纳法证明不等式

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \le \frac{M}{L}\frac{(L|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in I, n = 0, 1, 2, \cdots \quad (3.7)$$

首先：

$$|y_1(x)-y_0(x)| = |\int_{x_0}^{x} f(s,y_0)ds| \le M|x-x_0|,$$

计算

$$\begin{aligned}
|y_2(x)-y_1(x)| &= |\int_{x_0}^{x}[f(s,y_1(s))-f(s,y_0)]ds| \\
&\le |\int_{x_0}^{x} L|y_1(s)-y_0|ds| \le ML|\int_{x_0}^{x}|s-x_0|ds| \\
&\le ML\frac{|x-x_0|^2}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|y_3(x)-y_2(x)| &= |\int_{x_0}^{x}[f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))]ds| \\
&\le |\int_{x_0}^{x} L|y_2(s)-y_1(s)|ds| \\
&\le ML^2|\int_{x_0}^{x}\frac{|s-x_0|^2}{2}ds| = ML^2\frac{|x-x_0|^3}{6}.
\end{aligned}$$

假设$n=k$时（3.7）成立，接下来验证$n=k+1$的情形。先由（3.4）推出

$$|y_{k+2}(x)-y_{k+1}(x)| = |\int_{x_0}^{x}[f(s,y_{k+1}(s))-f(s,y_k(s))]ds|.$$

再利用Lipschitz条件和归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned}
|y_{k+2}(x)-y_{k+1}(x)| &\le |\int_{x_0}^{x} L|y_{k+1}(s)-y_k(s)|dx| \\
&\le M|\int_{x_0}^{x}\frac{(L|s-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}ds| = \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{k+2}}{(k+2)!}.
\end{aligned}$$

由此可见，当$n=k+1$时（3.7）也成立。因此，(3.7）得证。

显然，不等式（3.7）蕴含（3.6）在区间I上是一致收敛的。因此，Picard序列$y=y_n(x)$是一致收敛的。则极限函数

$$\varphi(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x), \quad x\in I$$

在区间I上是连续的。然后，利用$f(x,y)$的连续性以及Picard序列$y_n(x)$的一致收敛性，我们在（3.4）中令$n\to\infty$就得到

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds, \quad x\in I.$$

因此，$y=\varphi(x)$在I上是积分方程（3.1）的一个解。

（4）最后证明唯一性：设积分方程（3.1）有两个解分别为$y=u(x)$和$y=v(x)$。令$J=[x_0-d,x_0+d]$为它们的共同存在区间，其中d为某一正数（$d\le h$）。则由（3.1）得

$$u(x)-v(x)=\int_{x_0}^{x}[f(s,u(s))-f(s,v(s))]ds,\quad x\in J.$$

再利用Lipschitz条件，

$$|u(x)-v(x)|\le L|\int_{x_0}^{x}|u(s)-v(s)|ds|.\quad (3.8)$$

注意，在区间J上，$|u(s)-v(s)|$是连续有界的。因此可取它的一个上界K。则由（3.8），

$$|u(x)-v(x)|\le LK|x-x_0|.$$

然后把它代入（3.8）的右端，我们推出

$$|u(x)-v(x)|\le K\frac{(L|x-x_0|)^2}{2}.$$

如此递推，我们可用归纳法得到

$$|u(x)-v(x)|\le K\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!},\quad x\in J.$$

然后，令$n\to\infty$，则上面不等式的右端趋于零。因此，我们推出

$$u(x)=v(x),\quad x\in J.$$

这就是说，积分方程（3.1）的解是唯一的。 □

有了Picard定理，对于一般微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad (3.9)$$

只要能判别函数$f(x,y)$在某个区域D内连续并且对y有连续的偏微商（或满足Lipschitz条件），我们就可断言在区域D内经过每一点有并且只有一个解。

例如里卡蒂方程$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 虽然不能用初等积分法求解，但由Picard定理容易知道它在(x,y)平面上经过每一点有且只有一个解。

一般而言，如果函数$f(x,y)$在区域G内连续，而对y不满足Lipschitz条件，那么微分方程（3.9）在G内经过每一点仍有一个解（即Peano存在定理，见下一节），但这解可能是唯一的，也可能不是唯一的（参考本节习题1）。也就是说，Lipschitz条件只是解的唯一性的一个充分条件。在微分方程的一般理论中还没有保证解的唯一性的一个充要条件。

下面我们介绍一个比Lipschitz条件更弱的条件。设函数$f(x,y)$在区域G内连续，而且满足不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le F(|y_1-y_2|),$$

其中$F(r)>0$是$r>0$的连续函数，而且瑕积分

$$\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\infty$$

（$r_1>0$为常数）。则称$f(x,y)$在G内对y满足Osgood条件。注意，Lipschitz条件是Osgood条件的特例，这是因为$F(r)=Lr$满足上述要求。

Theorem 3.1.2. *定理3.2（Osgood）设$f(x,y)$在区域G内对y满足Osgood条件，则微分方程（3.9）在G内经过每一点的解都是唯一的。*

证明：假设不然。则在G内可以找到一点(x_0,y_0)使得方程（3.9）有两个解$y=y_1(x)$和$y=y_2(x)$ 都经过(x_0,y_0)，而且至少存在一个值$x_2\neq x_0$，使得$y_1(x_2)\neq y_2(x_2)$。不妨设$x_2>x_0$。令

$$\overline{x}=\sup_{x\in[x_0,x_1]}\{x:y_1(x)=y_2(x)\},$$

则显然有$x_0\le\overline{x}<x_2$，存在$\overline{x}<x_1\le x_2$使得（变换y_1,y_2）

$$r(x):=y_1(x)-y_2(x)>0,\quad \overline{x}<x\le x_1$$

和$r(\overline{x})=0$。因此，我们有

$$\begin{aligned}r'(x)&=y_1'(x)-y_2'(x)=f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))\\&\le F(|y_1(x)-y_2(x)|)=F(r(x)),\end{aligned}$$

因此从$\overline{x}$到x_1积分上式，得到

$$\int_{\overline{x}}^{x_1}\frac{r'(x)}{F(r(x))}dx=\int_0^{r(x_1)}\frac{dr}{F(r)}\le\int_{\overline{x}}^{x_1}dx=x_1-\overline{x},$$

其中$r(x_1)>0$。但根据假设条件上述不等式的左端是∞，而右端是一个有限的数。矛盾。 □

最后，我们还要指出：如果没有Lipschitz条件，那么一般也不能保证Picard序列的收敛性。见【例1】，即Müller反例：$F(x,y)$不满足Lipschitz条件，有唯一解，但Picard序列和它的任何子序列都不能充分接近（E_0）的解。这就是说，对初值问题（E_0）的求解，Picard逐次迭代法是无效的。

作业：1，2，3

§3.2 Peano存在性定理

本节旨在放宽有关微分方程解的存在性定理的条件。简言之，在Picard定理中如果只假定$f(x,y)$在R内的连续性，那么利用欧拉折线法仍可证明初值问题（E）的解在区间$|x-x_0|\le h$上是存在的（但不一定是唯一的）。这就是本节要介绍的Peano定理。

§3.2.1 欧拉折线

早在18世纪，欧拉提出用简单的折线来近似地描绘所要寻求的积分曲线——后人称这种方法为欧拉折线法。它是微分方程近似计算方法的开端。

设微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \quad (3.10)$$

和相关的初值问题

$$(E):\frac{dy}{dx}=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0,$$

其中$f(x,y)$是在矩形区域

$$R:|x-x_0|\le a, \quad |y-y_0|\le b$$

内给定的连续函数。令正数M为$|f(x,y)|$在R上的一个上界。则微分方程（3.10）的解$y=y(x)$ 在R内各点P的斜率$y'(x)$介于$-M$和M之间。由此不难推出：若$y=y(x)$是初值问题（E）的一个解，则它满足不等式

$$|y(x)-y_0|\le M|x-x_0|.$$

因此，为了保证初值问题（E）的积分曲线$y=y(x)$在矩形R内，我们只需作如下的限制：$M|x-x_0|\le b$，即

$$|x-x_0|\le\frac{b}{M}.$$

因此，只要令

$$h=\min\{a,\frac{b}{M}\},$$

则在区间$|x-x_0|\le h$上（E）的积分曲线$\Gamma:y=y(x)$停留在R内。事实上，它停留在$R':=[x_0-h,x_0+h]\times[y_0-b,y_0+b]$ 内的如下三角区之中

$$\triangle_h:|y-y_0|\le M|x-x_0|, \quad |x-x_0|\le h.$$

现在，把区间$|x-x_0|\le h$分成2n等份，则每份的长度为$h_n=h/n$，而$2n+1$个分点为

$$x_k=x_0+kh_n,\quad k=0,\pm1,\cdots,\pm n.$$

注意，x_{-n}和x_n为区间$[x_0-h,x_0+h]$的两个端点。

其次，从初值点$P_0(x_0,y_0)$出发先向右作折线如下：在P_0点以斜率为$f(x_0,y_0)$的射线延长使它与垂线$x=x_1$交于点$P_1(x_1,y_1)$。则

$$y_1=y_0+f(x_0,y_0)(x_1-x_0).$$

取直线段$[P_0,P_1]$作为折线的第一段，易知它停留在角形区$\triangle_h$内；再在P_1点以斜率为$f(x_1,y_1)$的射线延长，使它与垂线$x=x_2$相交于点$P_2(x_2,y_2)$，则有

$$y_2=y_1+f(x_1,y_1)(x_2-x_1).$$

取直线段$[P_1,P_2]$作为折线的第二段，易知它停留在角形区$\triangle_h$内；如此类推，我们在P_0点的右侧作出一条折线

$$[P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n]\subset\triangle_h,$$

它的节点依次为$P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n$。用相同的方法，再从P_0点出发可以向左作出一条折线

$$[P_{-n},\cdots,P_{-2},P_{-1},P_0]\subset\triangle_h.$$

然后，就在$\triangle_h$内得到一条连续的折线

$$\gamma_n=[P_{-n},\cdots,P_{-k},\cdots,P_{-1},P_0,P_1,\cdots,P_k,\cdots,P_n],$$

其中节点P_k的坐标为(x_k,y_k)，

$$y_k=y_{k-1}+f(x_{k-1},y_{k-1})(x_k-x_{k-1});$$

而P_{-k}的坐标(x_{-k},y_{-k})为

$$y_{-k}=y_{-k+1}+f(x_{-k+1},y_{-k+1})(x_{-k}-x_{-k+1}),$$

$k=1,2,\cdots,n$。称γ_n为初值问题（E）的欧拉折线。

令欧拉折线γ_n的表达式为

$$y=\varphi_n(x),\quad |x-x_0|\le h.\quad(3.11)$$

当$x_0 < x \le x_0 + h$时，则有非负整数s使得

$$x_s < x \le x_{s+1}, \quad 0 \le s \le n-1.$$

由此不难推出欧拉折线的计算公式

$$\varphi_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{s-1} f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_s, y_s)(x - x_s). \quad (3.12)$$

同理，当$x_0 - h \le x < x_0$时，存在非正整数s使得$x_{-s-1} \le x < x_{-s}$，因此

$$\varphi_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{-s+1} f(x_k, y_k)(x_{k-1} - x_k) + f(x_{-s}, y_{-s})(x - x_{-s}). \quad (3.13)$$

从几何意义可以看出，把上述欧拉折线$y = \varphi_n(x)$作为初值问题（E）的一个近似解是合理的。而且可以猜想：只要增大n，就能提高近似的精度。这在理论上需要证明欧拉折线$y = \varphi_n(x)$在区间$|x - x_0| \le h$上是收敛的（或至少有一个收敛的子序列），而且收敛到初值问题（E）的解。但是，由于在欧拉时代的数学分析还没有足够严格的基础，所以欧拉未能解决这个收敛性问题。后来，有了Ascoli引理，解决上面所说的问题已经不在话下。

§3.2.2 Ascoli引理

设在区间I上给定一个函数序列

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots \quad (3.14)$$

如果存在常数$K > 0$，使得不等式

$$|f_n(x)| \le K, \quad x \in I$$

对一切$n = 1, 2, \cdots$都成立，则称函数序列（3.14）在区间I上是一致有界的。

如果对任意正数ϵ，存在正数$\delta = \delta(\epsilon)$，使得只要$x_1, x_2 \in I$和$|x_1 - x_2| < \delta$，就有

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \epsilon, \quad n = 1, 2, \cdots$$

则称函数序列（3.14）在区间I上是等度连续（对n）的。

Ascoli引理：设函数序列（3.14）在有限闭区间I上是一致有界和等度连续的，则可以选取它的一个子序列

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \cdots, f_{n_k}(x), \cdots$$

使它在区间I上是一致收敛的。

§3.2.3 Peano存在性定理

引理3.1. 欧拉序列（3.11）在$|x-x_0|\le h$上至少有一个一致收敛的子序列。

证明：在3.2.1中我们已经指出，所有欧拉折线γ_n都停留在矩形区域R'内；即

$$|\varphi_n(x)-y_0|\le b,\quad |x-x_0|\le h,\quad n=1,2,\cdots$$

这就是说，欧拉序列（3.11）是一致有界的。

其次，注意折线γ_n的各个线段的斜率界于$-M$和M之间，其中M为$|f(x,y)|$在R的一个上界。因此，容易证明折线γ_n的任何割线的斜率也界于$-M$和M之间；即

$$|\varphi_n(s)-\varphi_n(t)|\le M|s-t|,\quad n=1,2,\cdots$$

其中s,t是区间$[x_0-h,x_0+h]$内的任意两点。因此序列（3.11）也是等度连续的。

因此，由Ascoli引理直接完成了引理3.1的证明。 □

引理3.2. 欧拉折线$y=\varphi_n(x)$在区间$|x-x_0|\le h$上满足关系式

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_n(x))dx+\delta_n(x),\quad (3.16)$$

其中函数$\delta_n(x)$趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(x)=0,\quad |x-x_0|\le h.\quad (3.17)$$

证明：这里是将欧拉折线与等价积分方程比较，但右侧与Picard迭代取为φ_{n-1}不同。我们只考虑右侧的情形：$x_0\le x\le x_0+h$，设$x_s<x\le x_{s+1}$。对于左侧的情形可作类似的讨论。

利用恒等式

$$f(x_i,y_i)(x_{i+1}-x_i)\equiv\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x_i,y_i)dx,\quad i=0,1,\cdots,s-1$$

就可得到

$$f(x_i,y_i)(x_{i+1}-x_i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x,\varphi_n(x))dx+d_n(i),$$

其中

$$d_n(i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x_i,y_i)-f(x,\varphi_n(x))]dx,\quad i=0,1,\cdots,s-1.$$

同样对于$x_s<x\le x_{s+1}$，可得

$$f(x_s,y_s)(x-x_s)=\int_{x_s}^{x}f(x,\varphi_n(x))+d_n^*(x),$$

其中

$$d_n^*(x)=\int_{x_s}^{x}[f(x_s,y_s)-f(x,\varphi_n(x))]dx.$$

因此，可把（3.12）写成如下形式：

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_n(x))dx+\delta_n(x),$$

其中

$$\delta_n(x)=\sum_{i=0}^{s-1}d_n(i)+d_n^*(i).$$

另一方面根据欧拉折线的构造，可知在区间$x\in[x_i,x_{i+1}],\forall i\geq 0$上成立不等式

$$|x-x_i|\leq\frac{h}{n},\quad |\varphi_n(x)-y_i|\leq M|x-x_i|\leq\frac{Mh}{n}.$$

因此，利用$f(x,y)$在紧集$R'=[x_0-h,x_0+h]\times[y_0-b,y_0+b]$上一致连续，对任给$\epsilon>0$，存在$N=N(\epsilon)>0$，使得$n>N$时

$$|f(x_i,y_i)-f(x,\varphi_n(x))|<\frac{\epsilon}{h},\quad x_i\leq x\leq x_{i+1}.$$

于是当$n>N$就有

$$|d_n(i)|\leq\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x_i,y_i)-f(x,\varphi_n(x))|dx<\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\epsilon}{h}dx=\frac{\epsilon}{n}.$$

同样，由于$x_s<x\leq x_{s+1}$，当$n>N$我们有

$$|d_n^*(x)|<\frac{\epsilon}{n}.$$

由此推出只要$n>N$，

$$|\delta_n(x)|<\frac{s\epsilon}{n}+\frac{\epsilon}{n}\leq\epsilon.$$

这就证明了（3.17），引理3.2从而得证。 □

现在，容易证明下述Peano存在性定理。

Theorem 3.2.1. *定理3.3. 设函数$f(x,y)$在矩形区域R内连续，则初值问题*

$$(E):\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

在区间$|x-x_0|\leq h$上存在解$y=y(x)$。

证明：利用引理3.1，我们可以选取欧拉折线序列（3.11）的一个子序列

$$\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), \cdots, \varphi_{n_k}(x), \cdots,$$

使它在区间$|x - x_0| \le h$上一致收敛。则极限函数

$$\varphi(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi_{n_k}(x)$$

在区间$|x - x_0| \le h$上是连续的。

再利用引理3.2，由（3.16）可知

$$\varphi_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n_k}(x))dx + \delta_{n_k}(x);$$

令$k \to \infty$，则由$\varphi_{n_k}(x)$的一致收敛性和（3.17），以及$f(x, y)$的连续性，我们推出

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))dx, \quad |x - x_0| \le h.$$

这就证明了$y = \varphi(x)$在区间$|x - x_0| \le h$上是（E）的一个解。定理3.3从而得证。 □

【附注1】由上述Peano定理的证明可知，初值问题（E）的欧拉序列的任何一个收敛子序列都趋于（E）的某个解。因此，如果（E）的解是唯一的，那么它的欧拉序列就一致收敛到那个唯一的解。另外，我们从3.1例1（Müller的例子）看到，对于初值问题（E）的Picard序列就不具有欧拉序列的上述性质（有收敛子列但不收敛到（E）的唯一解）。从这个意义上讲，欧拉序列比Picard序列合理。

【附注2】Peano定理在相当广泛的条件（即，只要求函数$f(x, y)$的连续性）下保证了初值问题解的存在性，而不保证唯一性。

【附注3】一般说来，如果不要求$f(x, y)$的连续性，那么上面的初值问题（E）可能是无解的。如附注3，它的解如果存在只能是三段的折线，无法回到初始点。

【附注】微分方程（包括偏微分方程）的存在性常常用到泛函分析中的理论。

作业：3-2：2，3

Arzela-Ascoli定理：参见【张恭庆-林源渠《泛函分析讲义》，第一章第三节】

定义1.3.1. 设(X,ρ)是一个距离空间，其中X为非空集合，距离函数ρ为X上的双变量实值函数，它满足非负性，对称性，三角不等式：

$$(1)\quad \rho(x,y)\geq 0;\quad \rho(x,y)=0 \quad \text{iff} \quad x=y;$$

$$(2)\quad \rho(x,y)=\rho(y,x);$$

$$(3)\quad \rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z).$$

设M为X的子集。如果M中任意点列在X中都有收敛子列，则称M是列紧的。若每个收敛子列还收敛到M中的点，则称M是自列紧的。

例子：$(\mathbb{R}^n,d_n)$中任意有界集是列紧集，任意有界闭集是自列紧集。

定义1.1.5. 设$\{x_n\}$是距离空间(X,ρ)中的无穷点列，如果对任意$\epsilon>0$，存在$N(\epsilon)$使得当$m,n\geq N(\epsilon)$时都有$\rho(x_m,x_n)<\epsilon$，则称$\{x_n\}$是一个基本列。如果距离空间(X,ρ)的所有基本列都是收敛列，则称(X,ρ)是完备的。

例1.1.7. 连续函数空间$(C[a,b],\rho(x(t),y(t)):=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|)$是完备距离空间。

证明：设$\{x_n\}$是$(C[a,b],\rho)$的一个基本列，则由定义对任意$\epsilon>0$，存在$N(\epsilon)$使得$m,n\geq N(\epsilon)$时，

$$\rho(x_m,x_n)=\max_{t\in[a,b]}|x_m(t)-x_n(t)|<\epsilon.$$

因此，对任意$t\in[a,b]$，

$$|x_m(t)-x_n(t)|<\epsilon,\quad \forall m,n\geq N(\epsilon),$$

即对任意固定$t\in[a,b]$，数列$\{x_n(t)\}$都是基本列，从而极限$\lim_{n\to\infty}x_n(t)$存在，记作$x_0(t)$。对上式令$m\to\infty$，则

$$|x_0(t)-x_n(t)|\leq\epsilon,\quad \forall n\geq N(\epsilon),\forall t\in[a,b].$$

即$x_n(t)$一致收敛到$x_0(t)$，从而$x_0(t)$连续，$x_n(t)$在$(C[a,b],\rho)$中收敛到$x_0(t)$。 □

函数列的列紧性与如下的有限ϵ网的存在性关系密切。

定义1.3.5（有限ϵ网）设M是(X,ρ)中的一个子集，$\epsilon>0$，$N\subset M$。如果对于$\forall x\in M,\exists y\in N$使得$\rho(x,y)<\epsilon$，则称$N$是$M$的一个$\epsilon$网。如果$N$还是一个有限集（个数依赖于$\epsilon$），那么称$N$为$M$的一个有限$\epsilon$网。如果对任意$\epsilon>0$，都存在$M$的一个有限$\epsilon$网，则称$M$是完全有界的。

定理（Hausdorff）完备距离空间(X,ρ)中集合M为列紧集当且仅当它完全有界。

证明：（1）设M是列紧集。反证法证明M是完全有界集，否则存在$\epsilon_0>0$，M中没有有限的ϵ_0网。则任取$x_1\in M$，由于$\{x_1\}$不是M的有限ϵ_0网，所以存在$x_2\in M\setminus B(x_1,\epsilon_\epsilon)$。对$\{x_1,x_2\}\subset M$，由于它不是$M$的有限$\epsilon_0$网，所以存在$x_3\in M\setminus[B(x_1,\epsilon_0)\cup B(x_2,\epsilon_0)]$。依此，可选取无穷序列$\{x_n\}_{n\geq1}\subset M$，$x_{n+1}\in M\setminus\cup_{k=1}^n B(x_k,\epsilon_0)$。显然对任意$m\neq n$，$\rho(x_m,x_n)\geq\epsilon_0$，它不能有收敛子列。这与$M$的列紧性矛盾。

（2）设M是完全有界集，$\{x_n\}_{n\geq1}$是M中的任意无穷点列。接下来抽取$\{x_n\}_{n\geq1}$的基本列：显然，M的有限1网中存在$y_1\in M$使得$\{x_n\}$有无穷子列$\{x_n^{(1)}\}\subset B(y_1,1)$。同样，$M$的有限$\frac{1}{2}$网中存在$y_2\in M$使得$\{x_n^{(1)}\}$有无穷子列$\{x_n^{(2)}\}\subset B(y_2,\frac{1}{2})$。依此，$M$的有限$\frac{1}{k}$网中存在$y_k\in M$使得$\{x_n^{(k-1)}\}$有无穷子列$\{x_n^{(k)}\}\subset B(y_k,\frac{1}{k})$。则子列$\{x_1^{(k)}\}$是一个基本列。事实上对任意$p,q\in\mathbb{N}$，

$$\rho(x_1^{(k+p)},x_1^{(k+q)})\leq\rho(x_1^{(k+p)},y_k)+\rho(x_1^{(k+q)},y_k)<\frac{2}{k}.$$

由于假设(X,ρ)为完备距离空间，所以$\{x_1^{(k)}\}$是一个收敛子列，所以M为列紧集。□

定理（Ascoli）设$M=\{\varphi_i\}\subset(C([a,b]),\rho)$一致有界且等度连续，则$\{\varphi_i\}$有收敛子列。

证明：已知$(C([a,b]),\rho)$为完备距离空间。由Hausdorff定理，任给$\epsilon>0$，只要可找到M的有限ϵ网，则M为$(C([a,b]),\rho)$中的列紧集，有收敛子列。由假设M是等度连续的，所以存在$\delta=\delta(\epsilon/3)>0$使得当$|x'-x|<\delta$时，

$$|\varphi(x)-\varphi(x')|<\epsilon/3,\quad\forall\varphi\in M.$$

对于$\delta(\epsilon/3)$，存在$[a,b]$的有限δ网$N(\delta):=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。作映射

$$T:M\to\mathbb{R}^n,\quad T\varphi:=(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n)).$$

由于$\{\varphi_i\}$一致有界，因此$\widetilde{M}:=T(M)$是$(\mathbb{R}^n,d_n)$中的有界集。从而$\widetilde{M}$是列紧集。由Hausdorff定理，$\widetilde{M}$有有限的$\epsilon/3$网$\widetilde{N}(\epsilon/3):=\{T\varphi_1,\cdots,T\varphi_m\}$。从而对任意$\varphi\in M$，存在$\varphi_\alpha\in\widetilde{N}(\epsilon/3)$使得

$$d_n(T\varphi,T\varphi_\alpha)<\epsilon/3.$$

任意$x\in[a,b]$可取$x_r\in N(\delta)$使得$|x-x_r|<\delta$，则对任意$\varphi\in M$

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi_\alpha(x)| &\leq |\varphi(x)-\varphi(x_r)|+|\varphi(x_r)-\varphi_\alpha(x_r)|+|\varphi_\alpha(x_r)-\varphi_\alpha(x)|\\ &< \frac{2\epsilon}{3}+d_n(T\varphi_i,T\varphi_\alpha)<\epsilon.\end{aligned}$$

因此$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$是$M$的有限$\epsilon$网。□

§3.3 解的延伸

我们之前只在局部范围内讨论初值问题解的存在性。本节准备把这种讨论扩大到整体。设微分方程
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad (3.18)$$
其中函数$f(x,y)$在区域G内连续。因此，我们可以利用上节的Peano定理推出：对于区域G内任何一点$P(x_0,y_0)$，微分方程（3.18）至少有一个解$y=\varphi(x)$满足初值条件

$$y(x_0) = y_0, \quad (3.19)$$

其中$y=\varphi(x)$的存在区间为$|x-x_0| \le h$，而正数h与初值点P_0的邻域R有关。因此，我们只知道上面的解在局部范围内是存在的。现在，我们要讨论这解在大范围内的存在性。主要的结果为下述解的延伸定理。

Theorem 3.3.1. *定理3.4. 设P_0为区域G（连通开集）内任一点，并设Γ为微分方程（3.18）经过P_0的任一条积分曲线。则对于任何有界闭区域$G_1(P_0 \in G_1 \subset G)$，积分曲线$\Gamma$将延伸到$G_1$之外（即不会全部都落在（任意）有界闭区域内，简单的称它可延伸到G的边界。但并非收敛到边界上某一点）。*

证明：设微分方程（3.18）经过P_0的解Γ有如下表达式：

$$\Gamma : y = \varphi(x), \quad x \in J,$$

其中J表示Γ的最大存在区间。仅讨论积分曲线Γ在P_0点右侧的延伸情况，P_0点的左侧同样可证。令J^+为Γ在P_0点右侧的最大存在区间，即$J^+ = J \cap [x_0,\infty)$。如果$J^+ = [x_0,\infty)$，那么积分曲线$\Gamma$在$G$内就延伸到无穷远，不会全部都落在（任意）有界闭区域内。否则，我们就又下面两种可能：

（1）J^+是有限闭区间：

令$J^+ = [x_0,x_1]$，其中常数$x_1 > x_0$。注意，当$x \in J^+$时，积分曲线停留在区域G内。令$y_1 = \varphi(x_1)$，则$(x_1,y_1) \in G$。因为区域G是一个开集，所以存在矩形区域

$$R_1 : |x-x_1| \le a_1, |y-y_1| \le b_1,$$

使得$R_1 \subset G$。在矩形区域R_1内我们可以利用定理3.3（Peano存在性定理）推出，微分方程（3.18）至少有一个解

$$y = \varphi_1(x), \quad |x-x_1| \le h_1$$

满足初值条件$\varphi_1(x_1)=y_1$，其中h_1是某个正数。然后，令

$$y(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x_0\le x\le x_1;\\ \varphi_1(x), & x_1\le x\le x_1+h_1.\end{cases}$$

则$y=y(x)$是连续可微的（$y'(x_1)=f(x_1,y_1)$），而且它在区间$[x_1,x_1+h_1]$上满足微分方程（3.18）。因此，它是积分曲线Γ在区间$[x_0,x_1+h_1]$上的表达式。由于已设积分曲线Γ的最大右侧存在区间为$J^+=[x_0,x_1]$，矛盾。因此，J^+不可能是有限闭区间。

（2）J^+是有限半开区间：令$J^+=[x_0,x_1)$，其中常数$x_1>x_0$。此时的困难是$(x,y(x))$当$x\to x_1^-$时不知是否存在极限点，因为未假设$|f|$在G上有界。我们要证明：对于任意有界闭区域$G_1\subset G$，不可能使

$$(x,\varphi(x))\in G_1,\quad \forall x\in J^+.\quad (3.20)$$

否则，设G_1是G内一个有界闭区域，使得（3.20）成立。因为$f(x,y)$在G_1上是连续的，而且G_1是一个有界闭区域，所以$|f(x,y)|$在G_1上有上界K。因此，由（3.20）和（3.21）可见，在J^+上$|\varphi'(x)|$有上界K。从而由Lagrange中值公式推出不等式

$$|\varphi(x)-\varphi(x')|\le K|x-x'|,\quad x,x'\in J^+.$$

由此当$x\to x_1$时，$\varphi(x)$的极限存在。令$y_1=\lim_{x\to x_1}\varphi(x)$。则$(x_1,y_1)\in G_1$。考虑矩形

$$R:|x-x_1|\le a_1,\quad |y-y_1|\le b_1$$

使得$R\subset G$。设$\max_R|f|\le M$。考虑$(x_2,y_2)\in\Gamma\cap\{|x-x_1|\le\frac{a_1}{2},|y-y_1|\le\frac{b_1}{2}\}$，并以$(x_2,y_2)$为初值点在以$(x_2,y_2)$为中心的矩形$\{|x-x_2|\le\frac{a_1}{2},|y-y_2|\le\frac{b_1}{2}\}$上解初值问题。此时，解的存在区间至少为$[x_2-h,x_2+h]$，其中$h=\min\{\frac{a_1}{2},\frac{b_1}{2M}\}$。选取$(x_2,y_2)\in\Gamma$使得$|x_1-x_2|<h$，则得到的解延拓到了$x_1$右方。这与$\Gamma$的最大存在区间为$[x_0,x_1)$矛盾。因此对任意有界闭区域$G_1\subset G$，（3.20）不成立。 □

由定理3.1和定理3.4立即可以得出下面的

推论：设函数$f(x,y)$在区域G内连续，而且对y满足局部的Lipschitz条件（即，对区域G内任一点q，存在以q点为中心的一个矩形区域$R\subset G$，使得在R内$f(x,y)$对y满足Lipschitz条件。注意，相应的Lipschitz常数L与矩形区域R有关），则微分方程（3.18）经过G内任一点P_0存在唯一的积分曲线Γ，并且Γ在G内延伸到边界。

【例1】证明如下微分方程的任一解的存在区间都是有界的

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2\quad (3.24)$$

证明: 利用上面的推论，这微分方程经过平面上任一点P_0的积分曲线Γ是唯一存在的，并且无限延伸。设$y=y(x)$是微分方程（3.24）满足初值条件$y(x_0)=y_0$的解。令$J^+=[x_0,\beta_0)$为它的右侧最大存在区间，其中$\beta_0>x_0$。当$\beta_0\le 0$时，J^+显然是一有限区间。当$\beta_0>0$时，则存在正数x_1，使得$[x_1,\beta_0)\subset J^+$。因此，上面的解$y=y(x)$在区间$[x_1,\beta_0)$内满足（3.24），即

$$y'(x)=x^2+y^2(x),\quad 0<x_1\le x<\beta_0.$$

由此推出

$$y'(x)\ge x_1^2+y^2(x),\quad x_1\le x<\beta_0,$$

或

$$\frac{y'(x)}{x_1^2+y^2(x)}\ge 1,\quad x_1\le x<\beta_0.$$

从x_1到x积分此不等式得

$$\int_{x_1}^{x}\frac{y'(x)}{x_1^2+y^2(x)}dx=\int_{y(x_1)}^{y(x)}\frac{dy}{x_1^2+y^2}=\frac{1}{x_1}[\arctan\frac{y(x)}{x_1}-\arctan\frac{y(x_1)}{x_1}]\ge\int_{x_1}^{x}dx=x-x_1\ge 0.$$

它蕴含

$$0\le x-x_1\le\frac{\pi}{x_1},\quad x_1\le x<\beta_0.$$

由此推出β_0是一个有限数，即J^+是一个有限区间。

左侧同样可证，因此，$y=y(x)$的最大存在区间是有限区间(α_0,β_0)，它与解的初值(x_0,y_0)有关。 □

一般而言，微分方程解的最大存在区间因解而异，对不同的解需要在不同的区间上进行讨论。因此，当我们并不知道解的最大存在区间时，就无从下手。在特定的条件下，下面的定理对解的存在区间作出了先验的断言。

Theorem 3.3.2. 设微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad (3.25)$$

其中函数$f(x,y)$在条形区域

$$S:\alpha<x<\beta,\quad -\infty<y<\infty$$

内连续，而且满足不等式

$$|f(x,y)|\le A(x)|y|+B(x),\quad (3.26)$$

其中$A(x)\ge 0$和$B(x)\ge 0$在区间$\alpha<x<\beta$上是连续的。则微分方程（3.25）的每一个解都以$\alpha<x<\beta$为最大存在区间。

证明：设微分方程（3.25）满足初值条件

$$y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in S$$

的一个解为$\Gamma : y = y(x)$。要证：Γ的最大存在区间为$\alpha < x < \beta$。只证明Γ的右侧最大存在区间为$[x_0, \beta)$。同样可证Γ的左侧最大存在区间必定是$(\alpha, x_0]$。

假设不然。令它的右侧最大存在区间为$[x_0, \beta_0)$，其中β_0是一个常数（$x_0 < \beta_0 < \beta$）。我们在β_0的两侧分别取常数x_1和x_2，使得

$$x_0 < x_1 < \beta_0 < x_2 < \beta, \quad x_2 - x_1 < x_1 - x_0, \quad a_1 := x_2 - x_1 \ll 1.$$

因此，在有限闭区间$[x_0, x_2]$上函数$A(x), B(x)$是连续有界的；令A_0, B_0分别是它们正的上界。再利用（3.26），我们得到

$$|f(x, y)| \le A_0|y| + B_0, \quad x_0 \le x \le x_2, -\infty < y < \infty. \quad (3.27)$$

现在，以$(x_1, y_1 := y(x_1)) \in \Gamma$为中心作一矩形区域

$$R_1 : |x - x_1| \le a_1, \quad |y - y_1| \le b_1.$$

其中b_1待定。R_1是条形区域S内的一个有界闭区域。由（3.27）容易推出不等式

$$|f(x, y)| \le A_0(|y_1| + b_1) + B_0 := M > 0, \quad (x, y) \in R_1. \quad (3.28)$$

令

$$h_1 = \min(a_1, \frac{b_1}{M}),$$

注意到，$[x_1 - h_1, x_1 + h_1]$是初值点(x_1, y_1)对应初值问题的相应可解区间。如果$a_1 \le \frac{b_1}{M}$，则我们已经延拓求解到$[x_0, x_2]$。又注意到

$$\lim_{b_1 \to \infty} \frac{b_1}{M} = \frac{1}{A_0},$$

所以我们可以选取x_2以及x_1使得

$$a_1 < \frac{1}{4A_0},$$

然后选取充分大$b_1 > 0$，此时可在矩形R_1内求解，相应的

$$h_1 = a_1 = x_2 - x_1.$$

由此推出，Γ在区间$x_0 \le x \le x_2$上存在。这与Γ的右侧最大存在区间$[x_0, \beta_0)$矛盾。它证明了Γ的右侧最大存在区间必定是$[x_0, \beta)$。 □

作业：1，2

§3.4 比较定理

Theorem 3.4.1. 定理*3.6*（第一比较定理）设函数$f(x,y)$与$F(x,y)$都在平面区域G内连续且满足不等式

$$f(x,y) < F(x,y), \quad (x,y) \in G. \quad (3.29)$$

又设函数$y=\varphi(x)$与$y=\Phi(x)$在区间$a<x<b$上分别是初值问题

$$(E_1): \frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

与

$$(E_2): \frac{dy}{dx} = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

的解，其中$(x_0,y_0) \in G$。则我们有

$$(3.30) \quad \begin{cases} \varphi(x) < \Phi(x), & x_0 < x < b; \\ \varphi(x) > \Phi(x), & a < x < x_0. \end{cases}$$

证明：在区间$a<x<b$上令函数$\psi(x) = \Phi(x) - \varphi(x)$，则由初值条件和不等式（3.29），

$$\psi(x_0) = 0, \quad \psi'(x_0) = F(x_0,y_0) - f(x_0,y_0) > 0.$$

因此，存在$\sigma > 0$，使得

$$\psi(x) > 0, \quad x_0 < x < x_0 + \sigma. \quad (3.31)$$

如果（3.30）的第一式不成立，则至少存在一个$x_1(> x_0)$使得$\psi(x_1) = 0$。再令

$$\beta = \min\{x | \psi(x) = 0, x_0 < x < b\}.$$

利用（3.31），我们推出

$$\psi(\beta) = 0, \quad \psi(x) > 0, x_0 < x < \beta,$$

它蕴含

$$\psi'(\beta) \leq 0.$$

但是另一方面，由于$\psi(\beta) = 0$，则有$\gamma := \Phi(\beta) = \varphi(\beta)$。所以再利用（3.29），我们有

$$\psi'(\beta) = \Phi'(\beta) - \varphi'(\beta) = F(\beta,\gamma) - f(\beta,\gamma) > 0.$$

这一矛盾证明了（3.30）的第一式成立。

同理可证第二式也成立。 □

第四章　奇解

一般说来，一阶微分方程拥有含一个任意常数的通解，另外可能还有不含于通解的特解。这种特解可以理解为通解的一种退化现象。它在几何上往往表现为解的唯一性遭到破坏。早在1694年莱布尼茨就已观察到，解族的包络也是一个解。Clairaut和欧拉对奇解作了探讨，得出了从p-判别式求奇解的方法。拉格朗日对奇解和通解的联系作了系统的研究，给出了从C-判别式求奇解的方法和奇解是积分曲线族的包络这一几何解释。本章先介绍于奇解密切相关的一阶隐式微分方程的解法，然后介绍奇解的概念和判别法，以及奇解与通解的联系。

§4.1　一阶隐式微分方程

作为对第二章初等积分法的补充，本节讨论一阶隐式方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad (4.1)$$

的几个特殊解法。这里所谓隐式的含义，是指方程中未知函数的微商$\frac{dy}{dx}$没有预先表示为(x, y)的显函数。

§4.1.1　微分法

设从微分方程（4.1）中可显式解出未知函数

$$y = f(x, p), \quad (4.2)$$

其中$p = \frac{dy}{dx}$。设函数$f(x, p)$对(x, p)是连续可微的。则由方程（4.2）对x进行微分得

$$p = f_x + f_p \frac{dp}{dx},$$

即

$$[f_x(x, p) - p]dx + f_p(x, p)dp = 0, \quad (4.3)$$

这是一个关于变量x, p的一阶显式微分方程。

如果能够得到方程（4.3）的通解$p = u(x, C)$，那么就得到方程（4.2）的通解

$$y = f(x, u(x, C)),$$

其中C是一个任意常数【注意，这里是将$p = u(x, C)$代回方程，而不是去求解它，因而产生新的任意常数】；另外，若方程（4.3）有特解$p = w(x)$，那么方程（4.2）有

相应的特解

$$y = f(x, w(x)).$$

在某些情况下，方程（4.3）的通解容易写成$x = v(p, C)$的形式，则方程（4.2）的通解可写成

$$\begin{cases} x = v(p, C), \\ y = f(v(p, C), p), \end{cases}$$

这里p视作一个参变量；同样，如果方程（4.3）有特解$x = z(p)$，则方程（4.2）有相应的特解

$$\begin{cases} x = z(p), \\ y = f(z(p), p). \end{cases}$$

克莱洛方程是一阶微分方程中一类特殊的方程，它除了通解，还有一个不包含在通解之内的奇解。摆线及二次曲线都是克莱罗方程的奇解。

【例1】求解克莱罗（Clairaut）方程

$$y = xp + f(p), \quad (p = \frac{dy}{dx}), \quad (4.4)$$

其中$f''(p) \neq 0$。

解：利用微分法，我们得到

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx},$$

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

当$\frac{dp}{dx} = 0$时，我们有$p = C$。因此得到克莱罗方程（4.4）的通解

$$y = Cx + f(C), \quad (4.5)$$

其中C是一个任意常数。

当$x + f'(p) = 0$时，我们得到克莱罗方程（4.4）的一个特解

$$x = -f'(p), \quad y = -f'(p)p + f(p), \quad (4.6)$$

其中p当作参数。因为$f''(p) \neq 0$，所以由$x = -f'(p)$可解得$p = w(x)$。然后代入上式，特解（4.6）可写成如下形式：

$$y = xw(x) + f(w(x)), \quad (4.7)$$

它的微商为$y' = p = w(x)$。记$C_0 = w(x_0)$，在$x = x_0$处特解（4.7）的切线为

$$y = C_0 x + f(C_0).$$

这就证明特解（4.7）在各点都有通解（4.5）中的某一解在该点与其相切；另外，对$x = -f'(p)$求导可得$1 = -f''(p)w'(x)$，$w'(x) = -1/f''(w(x)) \neq 0$，所以$p = w(x)$不是常数。因此特解（4.7）不能由通解（4.5）给出。

作为例子，当$f(p) = -\frac{1}{4}p^2$时，克莱罗方程的积分曲线族的图形见图4-1。此时，

$$y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2.$$

通解为

$$y = Cx - \frac{1}{4}C^2,$$

另有特解

$$x = -f'(p) = \frac{1}{2}p, \quad p = y'(x) = 2x, \quad y = x^2.$$

特别，通解的积分曲线为$y = x^2$的切线，相切于(x_0, x_0^2)的直线为$y = 2x_0 x - x_0^2$。

§4.1.2 参数法

设微分方程不明显包含自变量，即

$$F(y, p) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}. \quad (4.12)$$

作为变元y和p之间的联系。一般的，(4.12）给出yp平面上得曲线，设其有参数表示

$$y = g(t), \quad p = h(t). \quad (4.13)$$

其中也包含特殊情况$y = g(p)$或$p = h(y)$。为了讨论的需要，设$g(t), g'(t)$和$h(t)$都是参数t的连续函数，而且设$h(t) \neq 0$。根据上述微分方程的参数表示，我们有

$$dx = \frac{1}{p}dy = \frac{g'(t)}{h(t)}dt.$$

再利用积分，可得

$$x = \int \frac{g'(t)}{h(t)}dt + C.$$

因此，微分方程（4.12）有通解

$$x = \int \frac{g'(t)}{h(t)}dt + C, \quad y = g(t). \quad (4.14)$$

【例3】求解微分方程

$$y^2 + (\frac{dy}{dx})^2 = 1. \quad (4.15)$$

显然，方程（4.15）有参数表达式

$$y = \cos t, \quad \frac{dy}{dx} = \sin t, \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (4.16)$$

由此可以推出

$$dx = \frac{1}{\sin t} dy = \frac{1}{\sin t} d\cos t = -dt,$$

从而我们得到

$$x = -t + C.$$

因此，微分方程（4.15）的通解为

$$x = -t + C, \quad y = \cos t;$$

如果消去参数t，我们得到通解

$$y = \cos(x - C). \quad (4.17)$$

如果$p = y'(x) = 0$，则还有

$$y = \pm 1, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

易知$y = 1$和$y = -1$是微分方程（4.15）的两个特解。

因此，微分方程（4.15）有通解（4.17），另外还有特解$y = 1$和$y = -1$。特解上每一点都有通解中一个解与其相切。 □

显然，上面对方程（4.12）所用的参数法也一样适用于如下的微分方程：

$$F(x, \frac{dy}{dx}) = 0.$$

事实上，类似可寻找参数表示

$$x = g(t), \quad p = h(t),$$

$$dy = p dx = h(t) g'(t) dt,$$

$$y = \int h(t) g'(t) dt + C, \quad x = g(t).$$

【参数法解一般形式的一阶隐式方程】对于一阶隐式微分方程

$$F(x,y,p)=0,\quad p:=\frac{dy}{dx}\quad (4.18)$$

设它有参数表示

$$x=f(u,v),\quad y=g(u,v),\quad p=h(u,v),$$

这里u,v是两个参数。但它们还满足$dy=pdx$，所以我们有

$$g_u du+g_v dv=h(f_u du+f_v dv),$$

即有对称形式的一阶方程

$$(g_u-hf_u)du+(g_v-hf_v)dv=0.$$

如果我们能求得一阶显示微分方程（4.19）的通解

$$v=Q(u,C),\quad (4.20)$$

则微分方程（4.18）有通解

$$x=f(u,Q(u,C)),\quad y=g(u,Q(u,C)),$$

其中u是参变量，而C是一个积分常数；另外，如果方程（4.19）除通解（4.20）外还有特解$v=S(u)$，则

$$x=f(u,S(u)),y=g(u,S(u))$$

是微分方程（4.18）的特解。

【例4】用参数法求解微分方程

$$(\frac{dy}{dx})^2+y-x=0.\quad (4.21)$$

解：令

$$x=u,\quad p=v,$$

则

$$y=u-v^2.$$

接下来由$dy=pdx$消去一个参数。由$dy=pdx=vdx$

$$du-2vdv=vdu,$$

即

$$(v-1)du+2vdv=0.$$

这是变量分离的方程，容易求得它的通解

$$u = -2v - \ln(v-1)^2 + C$$

和一个特解$v = 1$。由此得到微分方程（4.21）的通解

$$x = C - 2v - \ln(v-1)^2, \quad y = C - 2v - \ln(v-1)^2 - v^2$$

和一个特解

$$x = u, \quad y = u - 1$$

即$y = x - 1$。

【例1（3）】求解

$$2xp = 2\tan y + p^3\cos^2 y.$$

解：引入参数y, v，及参数表示

$$p = \frac{v}{\cos y}$$

则

$$2vx = 2\sin y + v^3,$$
$$x = \frac{\sin y}{v} + \frac{v^2}{2}.$$

利用$dx = \frac{1}{p}dy$得

$$\frac{1}{v}\cos y dy - \frac{\sin y}{v^2}dv + vdv = \frac{\cos y}{v}dy,$$

从而

$$v = C, \quad \text{or} \quad v^3 = \sin y.$$

因此有通解

$$x = \frac{\sin y}{C} + \frac{C^2}{2}$$

特解

$$x = \frac{3}{2}(\sin y)^{\frac{2}{3}}.$$

另外，由$p = 0$求得特解$y = k\pi$。

【例子：季孝达书例6.2.1】最速下降问题：即求质点在重力作用下在Oxy平面内从原点沿着光滑曲线$y(x)$下降到$x = x_1 > 0$上某处（选定或不选定）所需的最短时间。首先所需时间为

$$J[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{v(x,y)} = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{\sqrt{2gy}}.$$

考虑变分：$y_s(x)$，其中s为参数，$h(x) := \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} y_s(x)$为变分/扰动。因此，

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}|_{s=0}\int_0^{x_1} F(x, y_s(x), y_s'(x))dx &= \int_0^{x_1}(F_y h + F_p h')dx \\ &= \int_0^{x_1}(F_y - \frac{dF_p}{dx})h dx + (F_p h)|_0^{x_1}.\end{aligned}$$

所以临界曲线满足

$$F_y - \frac{dF_p}{dx} = 0, \quad (F_p h)(x_1) = 0.$$

特别，当终点$y(x_1) > 0$固定时，边界条件满足；当终点不固定时，选取自然边界条件$F_p(x_1) = 0$。【与Lagrange力学对应：$F(x, y, y'(x)) \leftrightarrow L(t, x(t), x'(t))$】

对于

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}},$$

$F_y - \frac{dF_p}{dx} = 0$是一个二阶常微分方程。但注意到$F$不显含$x$，所以由Noether定理（拉式量的对称性对应守恒量），与x无关即能量守恒，即$H := y'F_p - F$与x无关，即

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_p) = F_y y' + F_p y'' - y'' F_p - y' \frac{dF_p}{dx} = y'(F_y - \frac{dF_p}{dx}) = 0.$$

从而（我们得到Euler-Lagrange方程的一个首次积分）

$$F - y'F_p = C,$$

即

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + (y')^2}} = C,$$

化简得

$$y[1 + (y')^2] = 2C_1, \quad C_1 = \frac{1}{4gC^2} > 0.$$

参数法求解该一阶常微分方程：令

$$y' = \cot \frac{\theta}{2}, \quad y = C_1(1 - \cos\theta),$$

则

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \sin\theta d\theta}{\cot\frac{\theta}{2}} = C_1(1 - \cos\theta)d\theta,$$

所以通解的参数形式为

$$\begin{cases} x(\theta) = C_1(\theta - \sin\theta) + C_2, \\ y(\theta) = C_1(1 - \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \theta_1. \end{cases}$$

由起点$(x,y)=(0,0)$对应于$\theta=0$，可得$C_2=0$。所以最速下降曲线为

$$\begin{cases} x(\theta)=C_1(\theta-\sin\theta), \\ y(\theta)=C_1(1-\cos\theta), \quad 0\le\theta\le\theta_1. \end{cases}$$

常数C_1由$x=x_1$（即$\theta=\theta_1$）处的边界条件来确定，而且也由这个边界条件来确定θ_1。分两种情况分别讨论：

（1）给定$y(x_1)=y_1>0$，则由

$$\begin{cases} x_1=C_1(\theta_1-\sin\theta_1), \\ y_1=C_1(1-\cos\theta_1), \end{cases}$$

推出

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{\theta_1-\sin\theta_1}{1-\cos\theta_1},$$

求出该方程的最小正根θ_1，接着确定

$$C_1=\frac{x_1}{\theta_1-\sin\theta_1}=\frac{y_1}{1-\cos\theta_1},$$

这样就确定了唯一得最速下降曲线。

（2）自然边界条件$F_p(x_1)=0$，即$y'(x_1)=0$，此时最速下降曲线在终点与直线$x=x_1$正交。由$y'(x_1)=0$可得

$$y'(x_1)=\frac{dy}{dx}(\theta=\theta_1)=\frac{C_1\sin\theta}{C_1(1-\cos\theta)}|_{\theta=\theta_1}=0,$$

由此确定得$\theta_1=\pi$。接着可确定

$$C_1=\frac{x_1}{\theta_1-\sin\theta_1}=\frac{x_1}{\pi}.$$

以上两种情况下的最速下降曲线均为旋轮线，滚圆的半径为C_1。

【附注：最速降线、摆线（Cycloid）、旋轮线】最速降线即摆线，等时问题的解（惠更斯几何方法、伯努利哥哥解析方法）。在数学中，摆线（Cycloid）被定义为，一个圆沿一条直线运动时，圆边界上一定点所形成的轨迹。例如定点固定为初始时圆（圆心为$(0,C_1)$）上落在原点的点p，当它滚动之后逆时针方向θ角度的点即$C_1(\sin\theta,1-\cos\theta)$ 落在x轴上时，p的坐标此时为$C_1(\theta-\sin\theta,1-\cos\theta)$。

等时性【当质点从摆线的不同点放开时，它们会同时到达底部】：我们考虑摆线的一段（变换一下y坐标的取法：$y\to -y+2r=r(1+\cos\theta)$），即沿

$$\begin{cases} x(\theta)=r(\theta-\sin\theta), \\ y(\theta)=r(1+\cos\theta), \quad 0\le\theta_0\le\theta\le\pi. \end{cases}$$

求下降所需的时间：首先在y处的速度为

$$v=\sqrt{2g(y_0-y)},$$

令$y'=\frac{dy}{dx}=-\tan\alpha<0$，则

$$\frac{dy}{dt}=-v\sin\alpha=v\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

$$dt=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}y'}dy=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}dx,$$

$$T(\theta_0\to\pi)=\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\frac{dx}{d\theta}d\theta.$$

将参数化曲线代入，并令$u=\cos\frac{\theta}{2}$

$$\begin{aligned}T &= \sqrt{\frac{2r}{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta}}d\theta\\ &= 2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^{\cos\frac{\theta_0}{2}}\frac{du}{\sqrt{\cos^2(\frac{\theta_0}{2})-u^2}}\\ &= 2\sqrt{\frac{r}{g}}\arcsin 1=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.\end{aligned}$$

摆线的周期为这个时间的两倍，即周期为

$$2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

作业：4-1：1，2

§4.2 奇解

在上一节我们已经看到某些一阶隐式微分方程的一些特解具有特殊的几何意义：经过该特解的每一点都有通解中的一条积分曲线与它在这点相切。

【例1】求解克莱罗（Clairaut）方程

$$y = xp + f(p), \quad (p = \frac{dy}{dx}), \quad (4.4)$$

其中$f''(p) \neq 0$。

解：利用微分法得到克莱罗方程（4.4）的通解

$$y = Cx + f(C), \quad (4.5)$$

其中C是一个任意常数。克莱罗方程（4.4）的一个特解

$$x = -f'(p), \quad y = -f'(p)p + f(p), \quad (4.6)$$

其中p当作参数。因为$f''(p) \neq 0$，所以由$x = -f'(p)$可解得$p = w(x)$。然后代入上式，特解（4.6）可写成如下形式：

$$y = xw(x) + f(w(x)). \quad (4.7)$$

【例3】求解微分方程

$$y^2 + (\frac{dy}{dx})^2 = 1. \quad (4.15)$$

利用参数法我们得到通解

$$y = \cos(x - C). \quad (4.17)$$

如果$p = y'(x) = 0$，则还有两个特解

$$y = \pm 1.$$

Definition 4.2.1. 设一阶微分方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad (4.22)$$

有一特解

$$\Gamma : y = \varphi(x), \quad x \in J.$$

如果对每一点$Q \in \Gamma$，在Q的任意小邻域内方程（*4.22*）有一个不同于Γ的解在Q点与Γ相切，则称Γ是微分方程（*4.22*）的奇解。

例如，(4.7）是克莱罗方程（4.4）的奇解（见图4-1），$y=1$和$y=-1$是微分方程（4.15）的两个奇解。下面的定理给出了奇解存在的必要条件。

Theorem 4.2.2. *定理4.1.* 设$(x,y,p)\in G, F(x,y,p)\in C^1(G)$。若函数$y=\varphi(x), x\in J$是微分方程$F(x,y,p)=0$的一个奇解，则$y=\varphi(x)$满足一个称之为$p$-判别式的联立方程

$$F(x,y,p)=0, \quad F_p(x,y,p)=0. \quad (4.23)$$

设从（*4.23*）中消去p得到方程

$$\triangle(x,y)=0, \quad (4.24)$$

则称由此决定的曲线为方程（*4.22*）的p-判别曲线。因此，微分方程（*4.22*）的奇解是一条p-判别曲线。

证明：因为$y=\varphi(x)$是微分方程（4.22）的解，所以它自然满足上述p-判别式的第一式。现证明它满足第二式。假设不然。则存在$x_0\in J$，使得

$$F_p(x_0,y_0,p_0)\neq 0,$$

其中$y_0=\varphi(x_0), p_0=\varphi'(x_0)$。注意$F(x_0,y_0,p_0)=0,(x_0,y_0,p_0)\in G$。因此根据隐函数定理，由方程（4.22）在$(x_0,y_0)$附近唯一的确定了

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \quad (4.25)$$

其中$f(x,y)\in C^1$使得$f(x_0,y_0)=p_0$。这就证明了微分方程（4.22）所有满足$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=p_0$的解也必定是微分方程（4.25）的解。

另一方面，由于在(x_0,y_0)的某邻域$f(x,y)\in C^1$，特别由$F(x,y,f(x,y))=0$，

$$F_y+F_pf_y=0, \quad f_y=-\frac{F_y}{F_p}.$$

所以由Picard定理可知，微分方程（4.25）满足初值条件$y(x_0)=y_0$的解是存在而且唯一的。由此可见，$y=\varphi(x)$在$x=x_0$处的某一邻域内是微分方程（4.25）经过(x_0,y_0)点的唯一解。这与$y=\varphi(x)$为奇解矛盾。定理4.1从而得证。 □

容易验证，克莱罗方程（4.4）的奇解（4.6）满足相应的p-判别式

$$xp+f(p)-y=0, \quad x+f'(p)=0.$$

微分方程（4.15）的奇解$y=1$和$y=-1$满足相应的p-判别式

$$p^2+y^2-1=0, \quad 2p=0.$$

这里须注意，由p-判别式确定的函数$y = \psi(x)$（p-判别曲线）不一定是相应方程的解；即使是解，也不一定是奇解。这就是说，定理4.1虽然把寻找微分方程（4.22）的奇解的范围缩小到它的p-判别式（4.23）或（4.24），但是由p-判别式规定的函数$y = \psi(x)$仍须根据奇解的定义经过验证才能确认它是否为奇解。而在不知道通解的情况下就难以进行这种验证。下面的定理在某种条件下克服了这一困难。

Theorem 4.2.3. *定理4.2. 设$F(x,y,p) \in C^2(G)$。设方程（4.22）的p-判别式*

$$F(x,y,p)=0, \quad F_p(x,y,p)=0 \quad (4.27)$$

（消去p后）得到的函数$y=\psi(x), x \in J$是微分方程（4.22）的解。如果对$x \in J$成立

$$F_y(x,\psi(x),\psi'(x)) \neq 0, \quad F_{pp}(x,\psi(x),\psi'(x)) \neq 0 \quad (4.28)$$

以及

$$F_p(x,\psi(x),\psi'(x))=0. \quad (4.29)$$

则$y=\psi(x)$是微分方程（4.22）的奇解。

证明：有一定难度，见本章最后一节。在此省略。注：p-判别曲线未必满足（4.29）。

§4.3 包络

本节将采用微分几何学中有关曲线族的包络的概念来阐明奇解和通解之间的联系，以及讨论求奇解的方法。设单参数C的曲线族

$$K(C): V(x,y,C)=0, \quad (4.31)$$

其中函数$V(x,y,C) \in C^1(G)$是连续可微的。例如，单参数C的曲线族：

（1）$x^2+y^2=C, C>0$，

（2）$y=(x-C)^2+1, -\infty<C<\infty$

在平面上分别表示一个以原点为中心的圆族和一个顶点在直线$y = 1$上的抛物线族。

Definition 4.3.1. *【定义4.2】设在平面上有一条连续可微的曲线Γ。如果对于任一点$Q \in \Gamma$，在曲线族（4.31）中都有一条曲线$K(C^*)$通过Q点并且在点Q与Γ相切，而且$K(C^*)$ 在Q点的任意小邻域内不同于Γ。则称曲线Γ为曲线族（4.31）的一支包络。*

例如，直线$y=1$是上面的抛物线族（2）的包络；而直线族$y=Cx-\frac{1}{4}C^2$有包络为$y=x^2$（参见图4-1，克莱罗方程中$f(p)=-\frac{1}{4}p^2$）。并不是每个曲线族都有包络，例如上面的同心圆族（1）就没有包络。

【附注1】我们在这里对包络所下的定义与一般微分几何所给的定义稍有不同，那里要求曲线族中的每一条曲线都与包络相切，这里的定义对微分方程的应用比较方便（见下面的例2）。

比较包络和奇解的定义可知，奇解是通解的包络。下面得定理告诉我们，通解的包络也是奇解。

Theorem 4.3.2. *定理4.3. 设微分方程*

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0, \quad (4.32)$$

有通积分

$$U(x,y,C)=0. \quad (4.33)$$

又设（积分）曲线族（4.33）有包络为$\Gamma: y=\varphi(x), \quad x\in J$。则包络$y=\varphi(x)$是微分方程（4.32）的奇解。

证明：根据奇解和包络的定义，我们只需证明Γ是微分方程（4.32）的解。

在Γ上任取一点(x_0,y_0)，其中$y_0=\varphi(x_0)$。则由包络的定义可知，曲线族（4.33）中有一条曲线$y=u(x,C_0)$在(x_0,y_0)点与$y=\varphi(x)$相切，即

$$\varphi(x_0)=u(x_0,C_0), \quad \varphi'(x_0)=u_x(x_0,C_0).$$

因为$y=u(x,C_0)$是微分方程（4.32）的一个解，所以

$$F(x_0,u(x_0,C_0),u_x(x_0,C_0))=0.$$

因此，$F(x_0,\varphi(x_0),\varphi'(x_0))=0$。由于$x_0\in J$是任意给定的，所以$y=\varphi(x)$是微分方程（4.32）的解。定理4.3证毕。 □

Theorem 4.3.3. *定理4.4. 设Γ是曲线族（4.31）的一支包络。则它满足C-判别式：*

$$V(x,y,C)=0, \quad V_C(x,y,C)=0. \quad (4.34)$$

或消去C，得到关系式

$$\Omega(x,y)=0. \quad (4.35)$$

证明：由包络的定义可见，我们可对包络Γ给出如下的参数表达式：

$$x = f(C), y = g(C), \quad C \in I,$$

其中C为曲线族（4.31）的参数，曲线$K(C)$与包络在$(x = f(C), y = g(C))$处相切。因此，我们推出

$$V(f(C), g(C), C) = 0, \quad C \in I. \quad (4.36)$$

因为包络是连续可微的（我们假设$f(C), g(C)$对C也是连续可微的），对C求导得

$$V_x f'(C) + V_y g'(C) + V_C = 0, \quad C \in I, \quad (4.37)$$

其中V_x, V_y, V_C同在$(f(C), g(C), C)$点取值。

不妨设

$$(f'(C), g'(C)) \neq (0,0), \quad and \quad (V_x, V_y) \neq (0,0).$$

否则，$(f'(C), g'(C)) = (0,0)$或$(V_x, V_y) = (0,0)$，则由（4.37）推出$V_C(f(C), g(C), C) = 0$。由假设，包络Γ在点$q(C) = (f(C), g(C))$的切向量$(f'(C), g'(C))$，以及通过$q(C)$点的曲线$V(x, y, C) = 0$在$q(C)$点的切向量$(-V_y, V_x)$（因为$V_x + V_y \frac{dy}{dx} = 0$）都是非退化的。由于这两个切向量在$q(C)$点是共线的，所以有

$$f'(C)V_x + g'(C)V_y = 0,$$

由它与（4.37）也推出（4.39）成立。因此，对于任何$C \in I$，关系式（4.36）和（4.39）同时成立。这就证明了包络Γ满足C-判别式（4.34）。定理4.4从而得证。 □

注：由于f, g关于C是否连续可微的问题，作另外考虑。由包络曲线$\Gamma \in C^1$，我们选取参数t使得Γ有参数表示$x = x(t), y = y(t)$，其中$x(t), y(t) \in C^1$。对于$(x(t), y(t)) \in \Gamma$，设对应的曲线为$K(C(t))$。则已有$V(x(t), y(t), C(t)) = 0$。接下来需要证明

$$V_C(x(t), y(t), C(t)) = 0.$$

否则设对于某个t_0，$V_C(x(t_0), y(t_0), C(t_0)) \neq 0$，于是由隐函数定理，在$(x(t_0), y(t_0), C(t_0))$的某个邻域内由$V(x, y, C) = 0$以及$V \in C^1$可以反解出

$$C = v(x, y)$$

使得$V(x, y, v(x, y)) = 0, v(x(t_0), y(t_0)) = C(t_0)$，且$v \in C^1$。特别，令$v(t) = v(x(t), y(t))$，则$V(x(t), y(t), v(t)) = 0, v(t_0) = C(t_0)$。又$V(x(t), y(t), C(t)) = 0, V_C(x(t_0), y(t_0), C(t_0)) \neq 0$，因此$C(t) = v(t) = v(x(t), y(t)) \in C^1$。即在$V_C \neq 0$处附近，$C(t)$是$C^1$的。另一方面

同上，由$K(C(t))$与包络相切可知对每一t，$x'(t)V_x+y'(t)V_y=0$，因此$C'(t)V_C=0$。又由假设$V_C\neq 0$，从而$C'(t)\equiv 0$。这与包络的定义矛盾。

例：安全抛物线。考虑从原点发射炮弹，初速度为v_0。设θ为初始的抛射角。则

$$x(t)=v_0t\cos\theta,\quad y(t)=v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2.$$

因此$t=\frac{x}{v_0\cos\theta}$，代入得

$$y=x\tan\theta-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2.$$

由C-判别法，这里θ是参数，包络还满足

$$\frac{x}{\cos^2\theta}-\frac{g}{2v_0^2}x^2\frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta}=0,$$

即

$$\tan\theta=\frac{v_0^2}{gx},$$

代回方程得包络（安全抛物线）

$$y=-\frac{g}{2v_0^2}x^2+\frac{v_0^2}{2g}.$$

反之，满足C-判别式的曲线未必是相应曲线族的包络（参见下面的例1）。下面定理给出了包络的一个充分条件。

Theorem 4.3.4. *定理4.5. 设由曲线族（4.31）的C-判别式*

$$V(x,y,C)=0,\quad V_C(x,y,C)=0$$

确定一支连续可微且不含于族（4.31）的曲线

$$\Lambda: x=\varphi(C), y=\psi(C),\quad C\in J,$$

而且它满足非退化性条件

$$(\varphi'(C),\psi'(C))\neq(0,0),\quad (V_x,V_y)(\varphi(C),\psi(C),C)\neq(0,0).\quad (4.40)$$

则Λ是曲线族（4.31）的一支包络。

证明：在Λ上任取一点$q(C)=(\varphi(C),\psi(C))$，则有

$$V(\varphi(C),\psi(C),C)=0,\quad V_C(\varphi(C),\psi(C),C)=0.\quad (4.41)$$

因为$(V_x, V_y) \neq (0,0)$，所以可对方程（4.31）在$q(C)$点利用隐函数定理确定一条连续可微的曲线$\Gamma_C: y = h(x)$（或$x = k(y)$，当$V_x \neq 0$），它在$q(C)$有切向量

$$\tau(C) = (-V_y, V_x).$$

而Λ在$q(C)$点的切向量为

$$\nu(C) = (\varphi'(C), \psi'(C)).$$

另一方面，由（4.41）的第一式对C求微分得到

$$\varphi'(C)V_x + \psi'(C)V_y + V_C = 0,$$

再利用（4.41）的第二式推出

$$\varphi'(C)V_x + \psi'(C)V_y = 0.$$

这就证明了切向量$\tau(C)$和$\nu(C)$在$q(C)$是共线的，即曲线族（4.31）中有曲线Γ_C在$q(C)$点与Λ相切。再由条件可知，曲线Γ_C与Λ不同。综合上面的结论可知，Λ是曲线族（4.31）的一支包络。定理4.5证毕。 $\square$

第五章　高阶微分方程

在实际问题中出现的微分方程通常包含若干个未知函数，以及它们的导数。各未知函数导数的最高阶之和叫做该微分方程的阶，它是反映求解微分方程难度的一个量。如果能把一个n阶微分方程降低到$n-1$阶，求解微分方程问题就前进了一步。本章将通过一些具体的例子介绍微分方程的降阶技巧，然后讨论一般高阶微分方程的初值问题解的存在性和唯一性，以及解对初值和参数的连续与可微性。关于高阶线性微分方程的一般理论和求解方法，将专门在下一章进行介绍。

§5.1　二阶方程的几个例子（都可降阶求解）：单摆、悬链线、二体问题（都与引力有关）

例:考虑微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \quad (5.2)$$

例如弹簧振动，单摆，行星在引力下运动都是这种形式的方程或方程组。令$v = \frac{dx}{dt}$，以v为新的变量，t当作参数，则

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}.$$

再代入方程（5.2），得到一个不显含t的一阶方程

$$v\frac{dv}{dx} = f(x),$$

它是变量分离的方程。因此，可以求出它的积分

$$v^2 = 2F(x) - C_1 = 2\int f(x)dx - C_1, \quad (5.3)$$

其中C_1为任意常数。（5.3）对于固定的C_1是一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2F(x) - C_1},$$

它也是变量分离的。因此，又可以求出它的积分

$$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{2F(x) - C_1}} = t + C_2, \quad (5.4)$$

其中C_2是第二个任意常数。称（5.4）为方程（5.2）的通积分；通常由它可得到通解$x = u(t, C_1, C_2)$。在实际求解时，求原函数G和从（5.4）反解x都可能遇到困难。

但其实对某些实际问题，并不需要完全求出通解（5.5）。如果我们只对运动的位移x和速度v 之间的关系，即运动的相(x, v)感兴趣，那么（5.3）就已经给出了这种关系。事实上，对于固定的常数C_1，关系式（5.3）在(x, v)平面（相平面）上确定一条（或几条）名为轨线的曲线Γ_{C_1}。例如，当$f(x) = -kx, k > 0$（简谐振动）时，利用（5.3）我们就有

$$v^2 + kx^2 = -C_1 = C^2,$$

轨线是一个以原点为中心的椭圆。

总结：微分方程（5.2）的求解在于引入新变量$v = \frac{dx}{dt}$，从而（5.2）等价于

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = f(x).$$

即

$$v\frac{dv}{dx} = f(x).$$

这里可以降阶求解依赖于f的特殊性，即它不显含t。

如果微分方程不显含自变量，则称它为自治（或驻定）微分方程。对它们可以进行降阶。例如，考虑n阶自治微分方程（当方程有x平移不变性时会如此）

$$F(y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0, \quad (5.1)$$

令$z = \frac{dy}{dx}$，则有关系式（$z = z(y) = z(y(x))$）

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(z\frac{dz}{dy}) = z\frac{d}{dy}(z\frac{dz}{dy}) = z^2\frac{d^2z}{dy^2} + z(\frac{dz}{dy})^2,$$

$$\cdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \varphi(z, \frac{dz}{dy}, \cdots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}).$$

然后，把它们代入方程（5.1），就得到一个$n-1$阶的微分方程（其中z是未知函数，而y是自变量）

$$F_1(y, z, \frac{dz}{dy}, \cdots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}) = 0.$$

另外，如果$F(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}) = 0$，引入$z = \frac{dy}{dx}$后直接降为一阶方程$F(z, \frac{dz}{dx}) = 0$。

【例1】单摆方程：设有一长度为l不能伸长的细线，它的上端固定在空间中的P_0点，而在下端悬挂一个质量为m的小球，并让它在一垂直平面内自由摆动（除重力外不受其他外力的作用）。

令摆线与垂线的有向夹角为x，而$x=0$对应于单摆下垂的位置。显然，摆线将在以P_0为中心以l为半径的圆周上来回摆动。这时$\frac{dx}{dt}$和$\frac{d^2x}{dt^2}$分别表示单摆振动的角速度和角加速度。以上端固定点为原点，以竖直向下的方向为u轴正向，水平向右为v轴正向，则

$$(u,v)=l(\cos x,\sin x),$$

$$\overrightarrow{v}=\frac{d}{dt}(u,v)=l\frac{dx}{dt}(-\sin x,\cos x),$$

$$\overrightarrow{a}:=\frac{d}{dt}\overrightarrow{v}=l\frac{d^2x}{dt^2}(-\sin x,\cos x)-l(\frac{dx}{dt})^2(\cos x,\sin x),$$

从而朝向$(\sin x,-\cos x)$方向的加速度大小为$-l\frac{d^2x}{dt^2}$。利用牛顿的第二运动定律，容易推出单摆的运动方程为

$$-ml\frac{d^2x}{dt^2}=mg\sin x,$$

或写成

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2\sin x=0,$$

其中常数$a=\sqrt{g/l}>0$。

单摆方程（5.7）属于方程（5.2）的类型。因此，可以用上述方法求解：令$v=\frac{dx}{dt}$，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx},$$

$$v\frac{dv}{dx}+a^2\sin x=0,$$

$$v^2=2a^2\cos x-C_1.$$

上述关系式称为首次积分（严格的定义见第十章）。它与诺特定理相关：不显含时间，所以能量守恒，即

$$\frac{1}{2}(\frac{dx}{dt})^2-a^2\cos x=\frac{1}{ml^2}[\frac{1}{2}m(l\frac{dx}{dt})^2-mgl\cos x]=-\frac{1}{2}C_1.$$

从而，

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{2a^2\cos x-C_1}.$$

因此分离变量，就可得到通积分

$$\int\frac{dx}{\pm\sqrt{2a^2\cos x-C_1}}=t+C_2.$$

因为这里出现了椭圆积分，我们再往下推演时就碰到了困难。

我们利用$\sin x$在$x=0$的泰勒展开，并取它的线性近似$\sin x \approx x$，这样原来的单摆方程（5.7）经”线性化“后就变成（弹簧振动、简谐振动）

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0. \quad (5.9)$$

对于这个简单的”线性化“方程，容易得到它的首次积分

$$(\frac{dx}{dt})^2 + a^2x^2 = C_1^2, \quad C_1 > 0.$$

因此，我们有

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{C_1^2 - a^2x^2},$$

再利用分离变量法，可以得到通积分

$$\pm\frac{1}{a}\arcsin(\frac{ax}{C_1}) = t + C_2,$$

由此求得通解

$$x = \frac{C_1}{a}\sin(at + D).$$

其中，$A := \frac{C_1}{a}$为振幅，a为频率，周期为$2\pi/a$与振幅A无关。但是单摆的周期与振幅A有关，但有

$$\lim_{A\to 0} T(A) = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/l}}.$$

摆线（等时曲线、最速降线）对应的周期为（R为滚轮的半径）

$$\frac{4\pi}{\sqrt{g/R}}.$$

【例2】悬链线方程

设有一理想的柔软而不能伸缩的均匀细线，单位长度重量为γ。把它悬挂在两个定点P_1和P_2之间。设这细线只受重力作用。试求悬链线的形状$y = y(x)$。

参看图5-6，设定点P_1和P_2在(x, y)平面内，x轴表示水平方向，而y轴垂直向上。令γ表示单位长细线所受的重力。任取悬链线$y = y(x)$上的一小段$\widetilde{PQ}$，设P和Q的坐标分别为$(x, y(x))$和$(x + \triangle x, y(x + \triangle x))$。则小段$\widetilde{PQ}$所受的重力为

$$W = \gamma\triangle s,$$

其方向为垂直向下。在$\widetilde{PQ}$上的作用力除重力W外还有张力F_1和F_2，它们分别在P点和Q点沿着切线方向。令F_1和F_2的水平分量分别为$H_1 = H(x)$和$H_2 = H(x + \triangle x)$，而垂直分量分别为$V_1 = V(x)$ 和$V_2 = V(x + \triangle x)$。然后，利用平衡条件，我们推出

$$H_2 - H_1 = 0, \quad V_2 - V_1 - W = 0.$$

由此可知，$H(x) = H_0$为常数，而

$$V(x + \triangle x) - V(x) = \gamma \triangle s.$$

令$\triangle x \to 0$，就有

$$V'(x) = \gamma \frac{ds}{dx}. \quad (5.14)$$

注意，弧长公式

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$$

和张力的方向，即$V/H = y'$，即

$$V(x) = H(x)y'(x) = H_0 y'(x),$$

我们由（5.14）推出

$$H_0 y''(x) = \gamma \sqrt{1 + (y'(x))^2}.$$

由此得到悬链线$y = y(x)$满足的微分方程

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}, \quad (5.15)$$

其中$a = \gamma / H_0$是常数。

另外，悬链线$y = y(x)$自然满足条件

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \quad (5.16)$$

注意，这条件不同于初值条件($y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$)；它叫作边值条件。因此，求解悬链线的形状$y = y(x)$就归结到求边值问题（5.15）+（5.16）的解。

微分方程（5.15）是一个二阶的自治系统，可按常规降阶。不过对它还有更简洁的降阶法。令$z = y'$。则（5.15）降为一阶方程

$$z' = a\sqrt{1 + z^2},$$

而且它是变量分离的。容易求出它的通解

$$z = \sinh a(x + C_1),$$

其中C_1是一个任意常数。由此可再积分，得到（5.15）的通解

$$y = \frac{1}{a} \cosh a(x + C_1) + C_2, \quad (5.17)$$

其中C_2是第二个任意常数。

利用通解（5.17）和边值条件（5.16），我们得到

$$\frac{1}{a}\cosh a(x_1+C_1)+C_2=y_1,$$

$$\frac{1}{a}\cosh a(x_2+C_1)+C_2=y_2.$$

由此可唯一确定任意常数C_1, C_2，从而由（5.17）给出所求的解，它是一个双曲余弦函数。但由于常数a依赖于未知的水平力H_0，所以需要先确定a，然后才能完全确定C_1, C_2。

设悬链线的长度为L，自然要求

$$L \geq \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \quad (5.18)$$

利用曲线的弧长积分公式，我们有

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}dx=\frac{1}{a}\int_{x_1}^{x_2}y''(x)dx \\ &= \frac{1}{a}[z(x_2)-z(x_1)]=\frac{1}{a}[\sinh a(x_2+C_1)-\sinh a(x_1+C_1)] \\ &= \frac{2}{a}\sinh\frac{a(x_2-x_1)}{2}\cosh\frac{a(x_1+x_2)+2C_1}{2}. \end{aligned}$$

另外，由（5.17）得到

$$\begin{aligned} y_2-y_1 &= \frac{1}{a}[\cosh a(x_2+C_1)-\cosh a(x_1+C_1)] \\ &= \frac{2}{a}\sinh\frac{a(x_2-x_1)}{2}\sinh\frac{a(x_1+x_2)+2C_1}{2}, \end{aligned}$$

由此推出

$$\sqrt{L^2-(y_2-y_1)^2}=\frac{2}{a}\sinh\frac{a(x_2-x_1)}{2}. \quad (5.19)$$

注意，由（5.18）可知（5.19）左端是一个正的常数K_0，再令常数$K_1=x_2-x_1>0$，则$K_0>K_1$。因此，由（5.19）得到

$$\frac{K_0}{2}a=\sinh(\frac{K_1}{2}a),$$

由此就可唯一的确定正数a，特别a与γ无关而只与端点位置有关。

【例3】二体问题：

地球绕太阳的运动历来是受人重视的问题之一。为了简单起见，我们将不考虑其他天体（微小）的影响。设太阳S位于惯性坐标系(x,y,z)的原点O，而地球E的坐标向量为

$$P(t)=(x(t),y(t),z(t)),$$

则E的运动速度和加速度分别为

$$\dot{P}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)),\quad \ddot{P}(t)=(\ddot{x}(t),\ddot{y}(t),\ddot{z}(t)).$$

令太阳和地球的质量分别为m_s和m_e。由牛顿第二定律和万有引力定律，我们得到地球运动的微分方程

$$m_e\ddot{P}(t)=-\frac{Gm_sm_e}{|P(t)|^2}\frac{P(t)}{|P(t)|},$$

其中G是万有引力常量，而$|P(t)|$表示$P(t)$的欧式模。即

$$\begin{cases}\ddot{x}=-\frac{Gm_sx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},\\ \ddot{y}=-\frac{Gm_sy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},\\ \ddot{z}=-\frac{Gm_sz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}.\end{cases}\quad (5.20)$$

它是一个自治的微分方程组，其中未知函数为$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$。

由力学的知识可知，地球的运动$(x(t),y(t),z(t))$还决定于它的初始状态（5.21）：

$$x(t_0)=x_0,\quad y(t_0)=y_0,\quad z(t_0)=z_0,$$

$$\dot{x}(t_0)=u_0,\quad \dot{y}(t_0)=v_0,\quad \dot{z}(t_0)=w_0.$$

因此，为了解决地球的运动问题，我们需要求初值问题（5.20）+（5.21）。方程组（5.20）阶数是六阶，通解含六个独立变量，由这里六个初值确定。

由（5.20）可以得到

$$z\ddot{y}-y\ddot{z}=0,$$

即

$$\frac{d}{dt}[z\dot{y}-y\dot{z}]=0.$$

由此得到一个首次积分

$$z\dot{y}-y\dot{z}=C_1,\quad (5.22)$$

其中C_1是任意常数。类似的，还可以求出另外两个首次积分

$$x\dot{z}-z\dot{x}=C_2,\quad (5.23)$$

$$y\dot{x}-x\dot{y}=C_3, \quad (5.24)$$

这里C_2,C_3都是常数。

这里即角动量守恒（诺特定理：转动（保持$|r|$的线性变换，即$O(n)$）不变性对应角动量守恒）

$$\frac{d}{dt}(P\times\dot{P})=P\times\ddot{P}=0, \quad P\times\dot{P}=-(C_1,C_2,C_3).$$

从而地球轨道在向量(C_1,C_2,C_3)的垂直平面上，并且固定时间内扫过的面积相等（开普勒第二定律）。

由（5.22，5.23，5.24）推出

$$C_1x+C_2y+C_3z=0.$$

这证明了地球运动的轨道永远在一个平面上。或者说，二体问题是一个平面问题。因此，我们不妨设地球的轨道永远在平面$z=0$上。因此，确定了两个独立常数$C_1=C_2=0$，因此方程降低两阶，方程（5.20）成为

$$\begin{cases}\ddot{x}+\mu x(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0, \quad (5.25)\\ \ddot{y}+\mu y(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0,\end{cases}$$

其中常数$\mu=Gm_s$。

接下来要利用另一个守恒量：动量。由上述方程可得

$$(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})+\mu(x\dot{x}+y\dot{y})(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0,$$

即

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}]=0.$$

因此又得到一个首次积分

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_4. \quad (5.26)$$

利用极坐标$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则（5.26）变成

$$(\frac{dr}{dt})^2+(r\frac{d\theta}{dt})^2-\frac{2\mu}{r}=C_4, \quad (5.27)$$

而首次积分（5.24）变成

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=-C_3. \quad (5.28)$$

不妨设常数$C_3>0$，若为零则轨道为直线，可由（5.27）解出。由（5.27，5.28）可知

$$(\frac{dr}{dt})^2=C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2,$$

它蕴含积分常数C_4必须满足$C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2\geq 0$，当$C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2=0$得到圆周轨道，半径由$C_3$唯一确定。此时

$$r=\frac{C_3^2}{\mu}=\frac{r^4\dot{\theta}^2}{Gm_s},$$

$$\dot{\theta}=-\sqrt{Gm_s}r^{-\frac{3}{2}},\quad T=\frac{2\pi}{\sqrt{Gm_s}}r^{\frac{3}{2}},\quad r|\dot{\theta}|=\sqrt{Gm_s}r^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{2}m_E(r\dot{\theta})^2=\frac{Gm_sm_e}{2r},U=-\frac{Gm_sm_e}{r},E=-\frac{Gm_sm_e}{2r}.$$

以下设

$$C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2>0.$$

因此，我们有

$$\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}.$$

再利用（5.28）推出

$$\frac{dr}{d\theta}=\pm\frac{r^2}{C_3}\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}.$$

即

$$\frac{d(\frac{C_3}{r})}{\pm\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}}=d\theta.$$

由此，我们得到

$$\arccos\frac{\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3}}{\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2}}=\theta-\theta_0,$$

从上式解出r作为θ的函数，得到

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)},\quad (5.29)$$

其中常数

$$e=\frac{C_3}{\mu}\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2}>0,\quad p=\frac{C_3^2}{\mu}>0.$$

由平面解析几何的知识得知方程（5.29）表示一条二次曲线。当$0\leq e<1$时，它是椭圆；当$e=1$时，它是抛物线；当$e>1$时，它是双曲线。我们知道，地球绕太阳的情形属于椭圆轨道，即$0<e<1$。

§5.2 n维线性空间中的微分方程

设n阶微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}), \quad (5.30)$$

这里x是自变量，而y是未知函数。

令

$$y_1 = y, \quad y_2 = \frac{dy}{dx}, \cdots, y_n = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

则微分方程（5.30）等价于下列n阶标准微分方程组：

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \cdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \quad (5.31)$$

这里等价的含义是：若函数$y = \varphi(x)$是方程（5.30）的解，则由它导出的函数组

$$y_1 = \varphi(x), y_2 = \varphi'(x), \cdots, y_n = \varphi^{(n-1)}(x)$$

是方程组（5.31）的解；反之，若函数组

$$y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \cdots, y_n = \varphi_n(x)$$

是方程组（5.31）的解，则其中的第一个函数$y = \varphi_1(x)$是方程（5.30）的解。

同样，可以考虑多个未知函数的高阶微分方程组。例如，微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} = F(x, u, \frac{du}{dx}, v, w, \frac{dw}{dx}, \frac{d^2w}{dx^2}), \\ \frac{dv}{dx} = G(x, u, \frac{du}{dx}, v, w, \frac{dw}{dx}, \frac{d^2w}{dx^2}), \\ \frac{d^3w}{dx^3} = H(x, u, \frac{du}{dx}, v, w, \frac{dw}{dx}, \frac{d^2w}{dx^2}), \end{cases} \quad (5.32)$$

其中未知函数u, v, w的最高微商的阶数分别为$2, 1, 3$。因此，微分方程组（5.32）的阶数是$n = 6$。令

$$\begin{cases} y_1 = u, y_2 = \frac{du}{dx}, \\ y_3 = v, \\ y_4 = w, y_5 = \frac{dw}{dx}, y_6 = \frac{d^2w}{dx^2}, \end{cases}$$

则方程组（5.32）等价于下面的6阶标准微分方程组（5.33）：

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = F(x, y_1, \cdots, y_6), \\ \frac{dy_3}{dx} = G(x, y_1, \cdots, y_6), \\ \frac{dy_4}{dx} = y_5, \\ \frac{dy_5}{dx} = y_6, \\ \frac{dy_6}{dx} = H(x, y_1, \cdots, y_6). \end{cases}$$

微分方程组（5.31）和（5.33）的特点是未知函数的个数等于微分方程本身的阶数。这类微分方程可以写成如下的标准形式：

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \cdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \end{cases} \tag{5.34}$$

其中$f_1, f_2, \cdots, f_n$是变元$(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$在某个区域$D$内的连续函数。

以下我们将采用向量的记号，使得微分方程组（5.34）可以写成更简洁的形式。为此，令n维的列向量

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

又令

$$f_i(x, \mathbf{y}) = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (f_1(x, \mathbf{y}), f_2(x, \mathbf{y}), \cdots, f_n(x, \mathbf{y}))^T \in \mathbb{R}^n,$$

而且规定

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = (\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots, \frac{dy_n}{dx})^T,$$

则微分方程组（5.34）的向量形式为

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}),$$

其中$\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$是关于变元$(x, \mathbf{y}) \in D$的一个$n$维向量值函数；也就是说，（5.35）的未知函数$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$在$n$维线性空间$\mathbb{R}^n$中取值。为了确定微分方程（5.35）的解，还需附加初值条件

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \quad (5.36)$$

其中的初值点$(x, \mathbf{y}_0) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$。这样，我们就需要研究初值问题（5.35）+（5.36）。

当$n=1$时，在第三章中已经证明了这种初值问题解的存在性定理以及唯一性定理（见Picard定理和Peano定理）。

当$n>1$时，只需要在线性空间$\mathbb{R}^n$中对向量引进适当的模，就可以用同样的方法对上述初值问题证明相应的Picard定理和Peano定理。

为此，在$\mathbb{R}^n$中任取$\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，令$|\mathbf{y}|$表示$\mathbf{y}$的模（范数），它可以按不同的方式来定义，例如：

（1）$|\mathbf{y}|=\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}$;

（2）$|\mathbf{y}|=|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|$;

（3）$|\mathbf{y}|=\max\{|y_1|,|y_2|,\cdots,|y_n|\}$。

注意，上面的第一种定义是大家熟悉的欧式模。我们可以按上述三种定义中的任何一种来理解n维向量的模，其实它们都是等价的（即由它们定义的开集分别是等价的）。对于我们照搬Picard定理来证明解的存在性，定义（3）在应用上比较方便。模的基本性质有下面三条：

1.对任何$\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$，$|\mathbf{y}|\geq 0$；而且$|\mathbf{y}|=0$当且仅当$\mathbf{y}=0$;

2.对任何$\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n,|\mathbf{y}+\mathbf{z}|\leq|\mathbf{y}|+|\mathbf{z}|$；

3.对任意$c\in\mathbb{R},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n,|c\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n|=|c||\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n|$。

例如对于（3），

$$|\mathbf{y}+\mathbf{z}|=\max_i|y_i+z_i|\leq|\mathbf{y}|+|\mathbf{z}|.$$

在线性空间$\mathbb{R}^n$中一旦引入模（范数）之后，$\mathbb{R}^n$就叫作n维赋范线性空间。而在n维赋范线性空间中用同样的方法可以建立大家熟知的微积分学和无穷级数一致收敛的概念，并证明类似Ascoli引理。自然，对函数$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$，可以定义在区域

$$R:|x-x_0|\leq a,\quad |\mathbf{y}-\mathbf{y}_0|\leq b$$

上的连续性以及相应的李氏条件

$$|\mathbf{f}(x,\mathbf{y})-\mathbf{f}(x,\mathbf{z})|\leq L|\mathbf{y}-\mathbf{z}|,$$

其中$L\geq 0$是李氏常数。

这样，在$\mathbb{R}^n$中我们已经建立了第三章中证明Picard定理和Peano定理时用过的所有有关的概念，而且它们在形式上也是完全一样的。所以我们可以照搬那里的方法来证明初值问题解的Picard定理和Peano定理

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{f}(x,\mathbf{y}),\quad \mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0.$$

证明（Picard定理）：记

$$\|\mathbf{y}\| = \max\{|y_1|, |y_2|, \cdots, |y_n|\}$$

取

$$M := \|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})\|, \quad (x, \mathbf{y}) \in R$$

其中$R = \{|x - x_0| \leq a, \|y - y\| \leq b\}$。令$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$。

(1)初值问题等价于积分方程

$$y^a(x) = y_0^a + \int_{x_0}^{x} f^a(s, y^1(s), \cdots, y^n(s))ds.$$

(2)考虑迭代函数列：

$$y_{k+1}^a(x) = y_0^a + \int_{x_0}^{x} f^a(x, y_k^1(s), \cdots, y_k^n(s))ds, \quad a = 1, 2, \cdots, n; k \geq 0,$$

其中$\mathbf{y}_0(s) = \mathbf{y}_0$。

注意到$f^a(x, y_0(x))$是I上的连续函数，所以

$$y_1^a(x) = y_0^a + \int_{x_0}^{x} f^a(s, y(x_0))ds, \quad x \in I$$

在I上是连续可微的，而且满足不等式

$$|y_1^a(x) - y_0^a| \leq |\int_{x_0}^{x} |f^a(s, y_0)|ds| \leq M|x - x_0|.$$

因此在区间$I = \{|x - x_0| \leq h\}$上，$|y_1^a(x) - y_0^a| \leq Mh \leq b$。

当$k = 1$时，

$$y_2^a(x) = y_0^a + \int_{x_0}^{x} f^a(s, y_1(s))ds, \quad x \in I$$

在I上是连续可微的，而且满足不等式

$$|y_2^a(x) - y_0^a| \leq |\int_{x_0}^{x} |f^a(s, \mathbf{y}_1(s))|ds| \leq M|x - x_0|,$$

从而，$\|\mathbf{y}_2(x) - \mathbf{y}_0| \leq Mh \leq b$，$x \in I$。

由此类推，用归纳法不难证明：Picard序列$\mathbf{y} = y_k^a(x)$在I上是连续可微的，而且满足不等式

$$\|\mathbf{y}_k(x) - \mathbf{y}_0\| \leq M|x - x_0|, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

（3）现在证明Picard序列$y = y_k^a(x)$在区间I上一致收敛到积分方程组的解。

注意，序列$y_k^a(x)$的收敛性等价于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}[y_{k+1}^a(x) - y_k^a(x)] \quad (3.6)$$

的收敛性。下面证明级数（3.6）在I上是一致收敛的。为此，我们用归纳法证明不等式

$$|y_{k+1}^a(x) - y_k^a(x)| \le \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \quad (3.7)$$

在I上成立（$k = 0, 1, 2, \cdots$）。首先：

$$|y_1^a(x) - y_0^a(x)| = |\int_{x_0}^{x} f^a(s, y_0)ds| \le M|x - x_0|,$$

设$\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$满足Lipschitz条件

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{z}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{w})| \le L\|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|,$$

计算

$$\begin{aligned} |y_2^a(x) - y_1^a(x)| &= |\int_{x_0}^{x}[f^a(s, \mathbf{y}_1(s)) - f^a(s, \mathbf{y}_0)]ds| \\ &\le |\int_{x_0}^{x} L\|\mathbf{y}_1(s) - \mathbf{y}_0\|ds| \le ML|\int_{x_0}^{x}|s - x_0|ds| \\ &\le ML\frac{|x - x_0|^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y_3^a(x) - y_2^a(x)| &= |\int_{x_0}^{x}[f^a(s, \mathbf{y}_2(s)) - f^a(s, \mathbf{y}_1(s))]ds| \\ &\le |\int_{x_0}^{x} L\|\mathbf{y}_2(s) - \mathbf{y}_1(s)\|ds| \\ &\le ML^2|\int_{x_0}^{x}\frac{|s - x_0|^2}{2}ds| \\ &= ML^2\frac{|x - x_0|^3}{6}. \end{aligned}$$

假设k时（3.7）成立，接下来验证$k+1$的情形。首先

$$\|\mathbf{y}_{k+2}(x) - \mathbf{y}_{k+1}(x)\| = \|\int_{x_0}^{x}[\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_{k+1}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_k(s))]ds|.$$

再利用Lipschitz条件和归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned}|y^a_{k+2}(x)-y^a_{k+1}(x)| &\le |\int_{x_0}^{x} L\|\mathbf{y}_{k+1}(s)-\mathbf{y}_k(s)\|dx| \\ &\le M|\int_{x_0}^{x}\frac{(L|s-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}ds| \\ &= \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{k+2}}{(k+2)!}.\end{aligned}$$

由此可见，当$k+1$时（3.7）也成立。因此，(3.7）得证。

显然，不等式（3.7）蕴含（3.6）在区间I上是一致收敛的。因此，Picard序列$y^a=y^a_k(x)$是一致收敛的。则极限函数

$$\varphi^a(x):=\lim_{k\to\infty}y^a_k(x),\quad x\in I$$

在区间I上是连续的。然后，利用$f^a(x,y)$的连续性以及Picard序列$y^a_k(x)$的一致收敛性，我们在（3.4）中令$k\to\infty$就得到

$$\varphi^a(x)=y^a_0+\int_{x_0}^{x}f^a(s,\varphi(s))ds,\quad x\in I.$$

因此，$y^a=\varphi^a(x)$在I上是积分方程（3.1）的一个解。

（4）最后证明唯一性：设积分方程（3.1）有两个解分别为$y^a=u^a(x)$和$y^a=v^a(x)$。令$J=[x_0-d,x_0+d]$为它们的共同存在区间，其中d为某一正数（$d\le h$）。则由（3.1）得

$$u^a(x)-v^a(x)=\int_{x_0}^{x}[f^a(s,\mathbf{u}(s))-f^a(s,\mathbf{v}(s))]ds,\quad x\in J.$$

再利用Lipschitz条件，

$$|u^a(x)-v^a(x)|\le L|\int_{x_0}^{x}\|\mathbf{u}(s)-\mathbf{v}(s)\|ds|.\quad (3.8)$$

注意，在区间J上，$\|\mathbf{u}(s)-\mathbf{v}(s)\|$是连续有界的。因此可取它的一个上界$K$。则由（3.8），

$$|u^a(x)-v^a(x)|\le LK|x-x_0|.$$

然后把它代入（3.8）的右端，我们推出

$$|u^a(x)-v^a(x)|\le K\frac{(L|x-x_0|)^2}{2}.$$

如此递推，我们可用归纳法得到

$$|u^a(x)-v^a(x)|\le K\frac{(L|x-x_0|)^k}{k!},\quad x\in J.$$

然后，令$k \to \infty$，则上面不等式的右端趋于零。因此，我们推出

$$u^a(x) = v^a(x), \quad x \in J.$$

这就是说，积分方程（3.1）的解是唯一的。 □

Peano定理的证明：

（1）先构造欧拉折线：将$[x_0 - h, x_0 + h]$等分为$2n$份，分点记作

$$x_k = x_0 + kh_n, \quad h_n = h/n, \quad k = 0, \pm 1, \cdots, \pm n.$$

从$(x_0, \mathbf{y}_0)$开始作折线（如下只看右侧，即$k \geq 0$），

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k-1} + \mathbf{f}(x_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \quad 1 \leq k \leq n.$$

令欧拉折线γ_n的表达式为

$$\mathbf{y} = \varphi_n(x), \quad |x - x_0| \leq h. \quad (3.11)$$

设有非负整数s使得

$$x_s < x \leq x_{s+1}, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

由此不难推出欧拉折线的计算公式

$$\varphi_n(x) = \mathbf{y}_0 + \sum_{k=0}^{s-1} \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k)(x_{k+1} - x_k) + \mathbf{f}(x_s, \mathbf{y}_s)(x - x_s). \quad (3.12)$$

（2）Ascoli引理

设在区间I上给定一个向量值函数序列

$$\mathbf{f}_1(x), \mathbf{f}_2(x), \cdots, \mathbf{f}_n(x), \cdots \quad (3.14)$$

如果存在常数$K > 0$，使得不等式

$$\|\mathbf{f}_n(x)\| \leq K, \quad x \in I$$

对一切$n = 1, 2, \cdots$都成立，则称函数序列（3.14）在区间I上是一致有界的。

如果对任意正数ϵ，存在正数$\delta = \delta(\epsilon)$，使得只要$x_1, x_2 \in I$和$|x_1 - x_2| < \delta$，就有

$$\|\mathbf{f}_n(x_1) - \mathbf{f}_n(x_2)\| < \epsilon, \quad \forall n = 1, 2, \cdots$$

则称函数序列（3.14）在区间I上是等度连续（对n）的。

Ascoli引理：设向量值函数序列（3.14）在有限闭区间I上是一致有界和等度连续的，则可以选取它的一个子序列

$$\mathbf{f}_{n_1}(x), \mathbf{f}_{n_2}(x), \cdots, \mathbf{f}_{n_k}(x), \cdots$$

使它在区间I上是一致收敛的。

引理：欧拉序列（3.11）在$|x-x_0| \le h$上至少有一个一致收敛的子序列。

证明：由$\|\mathbf{f}\| \le M$:

$$\|\varphi_n(x) - \mathbf{y}_0\| \le b, \quad |x-x_0| \le h, \quad n = 1, 2, \cdots$$

这就是说，欧拉序列（3.11）是一致有界的。

同样由$\|\mathbf{f}\| \le M$:

$$\|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)\| \le M|s-t|, \quad n = 1, 2, \cdots$$

其中s, t是区间$[x_0 - h, x_0 + h]$内的任意两点。因此序列（3.11）也是等度连续的。

因此，由Ascoli引理直接完成了引理3.1的证明。 □

（3）与等价积分方程比较：

引理3.2. 欧拉折线$\mathbf{y} = \varphi_n(x)$在区间$|x-x_0| \le h$上满足关系式

$$\varphi_n(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(x, \varphi_n(x))dx + \delta_n(x), \quad (3.16)$$

其中$\delta_n(x)$趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty} \|\delta_n(x)\| = 0, \quad |x-x_0| \le h. \quad (3.17)$$

证明：这里是将欧拉折线与等价积分方程比较，但右侧与Picard迭代取为φ_{n-1}不同。我们只考虑右侧的情形：$x_0 \le x \le x_0 + h$，设$x_s < x \le x_{s+1}$。对于左侧的情形可作类似的讨论。

利用恒等式

$$\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i)(x_{i+1} - x_i) \equiv \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i)dx, \quad i = 0, 1, \cdots, s-1$$

就可得到

$$\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{f}(x, \varphi_n(x))dx + \mathbf{d}_n(i),$$

其中

$$\mathbf{d}_n(i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}}[\mathbf{f}(x_i,\mathbf{y}_i)-\mathbf{f}(x,\varphi_n(x))]dx,\quad i=0,1,\cdots,s-1.$$

同样对于$x_s<x\le x_{s+1}$，可得

$$\mathbf{f}(x_s,\mathbf{y}_s)(x-x_s)=\int_{x_s}^{x}\mathbf{f}(x,\varphi_n(x))+\mathbf{d}_n^*(x),$$

其中

$$\mathbf{d}_n^*(x)=\int_{x_s}^{x}[\mathbf{f}(x_s,\mathbf{y}_s)-\mathbf{f}(x,\varphi_n(x))]dx.$$

因此，可把（3.12）写成如下形式：

$$\varphi_n(x)=\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(x,\varphi_n(x))dx+\delta_n(x),$$

其中

$$\delta_n(x)=\sum_{i=0}^{s-1}\mathbf{d}_n(i)+\mathbf{d}_n^*(i).$$

另一方面根据欧拉折线的构造，可知在区间$x\in[x_i,x_{i+1}],\forall i\ge 0$上成立不等式

$$|x-x_i|\le\frac{h}{n},\quad \|\varphi_n(x)-\mathbf{y}_i\|\le M|x-x_i|\le\frac{Mh}{n}.$$

因此，利用$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$在紧集$R'=[x_0-h,x_0+h]\times\{\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0\|\le b\}$上一致连续，对任给$\epsilon>0$，存在$N=N(\epsilon)>0$，使得$n>N$时

$$\|\mathbf{f}(x_i,\mathbf{y}_i)-\mathbf{f}(x,\varphi_n(x))\|<\frac{\epsilon}{h},\quad x_i\le x\le x_{i+1}.$$

于是当$n>N$就有

$$\|\mathbf{d}_n(i)\|\le\int_{x_i}^{x_{i+1}}\|\mathbf{f}(x_i,\mathbf{y}_i)-\mathbf{f}(x,\varphi_n(x))\|dx<\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\epsilon}{h}dx=\frac{\epsilon}{n}.$$

同样，由于$x_s<x\le x_{s+1}$，当$n>N$我们有

$$\|\mathbf{d}_n^*(x)\|<\frac{\epsilon}{n}.$$

由此推出只要$n>N$，

$$\|\delta_n(x)\|<\frac{s\epsilon}{n}+\frac{\epsilon}{n}\le\epsilon.$$

这就证明了（3.17），引理3.2从而得证。 □

（4）现在，容易证明下述Peano存在性定理。

Theorem 5.2.1. *定理3.3.* 设向量值函数$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$在矩形区域R内连续，则初值问题

$$(E):\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{f}(x,\mathbf{y}),\quad \mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0$$

在区间$|x-x_0|\le h$上存在解$\mathbf{y}=\mathbf{y}(x)$。

证明：利用引理3.1，我们可以选取欧拉折线序列（3.11）的一个子序列

$$\varphi_{n_1}(x),\varphi_{n_2}(x),\cdots,\varphi_{n_k}(x),\cdots,$$

使它在区间$|x-x_0|\le h$上一致收敛。则极限函数

$$\varphi(x)=\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(x)$$

在区间$|x-x_0|\le h$上是连续的。

再利用引理3.2，由（3.16）可知

$$\varphi_{n_k}(x)=\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(x,\varphi_{n_k}(x))dx+\delta_{n_k}(x);$$

令$k\to\infty$，则由$\varphi_{n_k}(x)$的一致收敛性和（3.17），以及$f(x,y)$的连续性，我们推出

$$\varphi(x)=\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(x,\varphi(x))dx,\quad |x-x_0|\le h.$$

这就证明了$\mathbf{y}=\varphi(x)$在区间$|x-x_0|\le h$上是（E）的一个解。定理3.3从而得证。 □

§5.3 解对初值和参数的连续依赖性

微分方程的解不仅决定于微分方程本身，而且也决定于解的初值。通常，微分方程还包含某些参数。因此，我们需要考虑微分方程的解对初值和参数的依赖性。

例如，线性单摆方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=0$$

满足初值条件

$$x(t_0)=x_0,\quad x'(t_0)=v_0$$

的解为

$$x=x_0\cos a(t-t_0)+\frac{v_0}{a}\sin a(t-t_0).$$

显然，它对于初值t_0,x_0,v_0和参数a是连续的，而且也是连续可微的。注意，参数$a=\sqrt{g/l}$随重力加速度g和单摆长度l而定。由于初值x_0,v_0和常数g,l都是由测量得到的，而任何测量都难免存在误差。所以上述解对x_0,v_0和常数a的连续性有明显的物理意义：只要初值和参数的误差足够小，相应的单摆振动只有很小的偏差。

二体问题的解为

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)},\quad (5.29)$$

其中常数

$$e=\frac{C_3}{\mu}\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2}\geq 0,\quad p=\frac{C_3^2}{\mu}>0.$$

当$0\leq e<1$时，它是椭圆；当$e=1$时，它是抛物线；当$e>1$时，它是双曲线。

我们将讨论一般n阶微分方程组的初值问题

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{f}(x,\mathbf{y},\lambda),\quad \mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0\quad (5.40)$$

的解$\mathbf{y}=\varphi(x;x_0,\mathbf{y}_0;\lambda)$关于初值$(x_0,\mathbf{y}_0)$和$\lambda$的连续依赖性问题，这里$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in K\subset\mathbb{R}^m$。事实上，初值也可以合并为参数来看。为此，作变换

$$t=x-x_0,\quad \mathbf{u}=\mathbf{y}-\mathbf{y}_0,$$

其中t是新的自变量，而$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$是未知函数。则初值问题（5.40）变成

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{f}(t+x_0,\mathbf{u}+\mathbf{y}_0,\lambda),\quad \mathbf{u}(0)=\mathbf{0}.\quad (5.41)$$

注意，原来的初值$(x_0, \mathbf{y}_0)$在（5.41）的微分方程中和λ一样以参数的形式出现，而（5.41）的初值条件是固定不变的。因此，不失一般性，我们只讨论初值问题

$$(E_\lambda): \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda), \quad \mathbf{y}(0) = 0 \quad (5.42)$$

的解$\mathbf{y} = \varphi(x, \lambda)$对参量$\lambda$的依赖性，其中$\lambda$是$m$维的参数向量。

我们论证的思路是：先证明初值问题(E_λ)的Picard序列$\{\varphi_k(x, \lambda)\}$ 对参数λ的连续性；再证明$\varphi_k(x, \lambda)$是一致收敛的，而且它的极限函数$\mathbf{y} = \varphi(x, \lambda)$是$(E_\lambda)$的解，从而也就证明了有关的解对参数λ的连续性。令

$$\|\mathbf{y}\| = \max\{|y_1|, |y_2|, \cdots, |y_n|\}$$

Theorem 5.3.1. *定理5.1. 设n维向量值函数$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda)$在区域*

$$G: |x| \leq a, \|\mathbf{y}\| \leq b, \|\lambda - \lambda_0\| \leq c$$

上是连续的，而且对$\mathbf{y}$满足Lipschitz条件

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1, \lambda) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2, \lambda)\| \leq L\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|,$$

其中常数$L \geq 0$。令正数M为$\|f(x, \mathbf{y}, \lambda)\|$在区域$G$的一个上界，而且令

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}.$$

则初值问题(E_λ)存在唯一解，并且解$\mathbf{y} = \varphi(x, \lambda)$在区域

$$D: |x| \leq h, \|\lambda - \lambda_0\| \leq c$$

上是连续的。

证明：由于这证明与第三章中Picard定理的证明非常类似，我们只列出要点：

（1）初值问题(E_λ)等价于积分方程

$$\mathbf{y} = \int_0^x \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda) dx. \quad (5.43)$$

即

$$y^a(x) = \int_0^x f^a(s, \mathbf{y}(s), \lambda) ds, \quad a = 1, \cdots, n.$$

（2）由此可以作Picard序列

$$\mathbf{y}_{k+1}(x, \lambda) = \int_0^x \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_k(x, \lambda), \lambda) dx, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \quad (5.44)$$

其中$\mathbf{y}_0(x,\lambda)=\mathbf{y}_0=0$和$(x,\lambda)\in D$。

（3）用归纳法证明$\mathbf{y}_k(x,\lambda)$对$(x,\lambda)\in D$是连续的。

注意到$f^a(x,\mathbf{y}_0(x),\lambda)$是$D$上的连续函数，所以

$$y_1^a(x,\lambda)=\int_0^x f^a(s,0,\lambda)ds,$$

在D上是连续的，而且满足不等式

$$|y_1^a(x,\lambda)|\le|\int_0^x|f^a(s,0,\lambda)|ds|\le M|x|.$$

因此在D上，$|y_1^a(x,\lambda)|\le Mh\le b$。

当$k=1$时，

$$y_2^a(x,\lambda)=\int_0^x f^a(s,\mathbf{y}_1(s,\lambda),\lambda)ds,$$

在D上是连续的，而且满足不等式

$$|y_2^a(x,\lambda)|\le|\int_0^x|f^a(s,\mathbf{y}_1(s,\lambda),\lambda)|ds|\le M|x|,$$

从而，$\|\mathbf{y}_2(x,\lambda)\|\le Mh\le b$，$(x,\lambda)\in D$。

由此类推，用归纳法不难证明：Picard序列$\mathbf{y}=y_k^a(x,\lambda)$在$D$上是连续的，而且满足不等式

$$\|\mathbf{y}_k(x,\lambda)\|\le M|x|,\quad k=0,1,2,\cdots$$

（4）用归纳法证明

$$\|\mathbf{y}_{k+1}(x,\lambda)-\mathbf{y}_k(x,\lambda)\|\le\frac{M}{L}\frac{(L|x|)^{k+1}}{(k+1)!},$$

它蕴含Picard序列$\mathbf{y}_k(x,\lambda)$对$(x,\lambda)\in D$是一致收敛的。首先：

$$|y_1^a(x,\lambda)|=|\int_0^x f^a(s,0,\lambda)ds|\le M|x|,$$

因$\mathbf{f}(x,\mathbf{y},\lambda)$满足Lipschitz条件

$$\|\mathbf{f}(x,\mathbf{z},\lambda)-\mathbf{f}(x,\mathbf{w},\lambda)|\le L\|\mathbf{z}-\mathbf{w}\|,$$

可计算

$$\begin{aligned}|y_2^a(x,\lambda)-y_1^a(x,\lambda)| &= |\int_0^x[f^a(s,\mathbf{y}_1(s,\lambda),\lambda)-f^a(s,0,\lambda)]ds|\\ &\le |\int_0^x L\|\mathbf{y}_1(s,\lambda)\|ds|\le ML|\int_0^x|s|ds|\\ &\le ML\frac{|x|^2}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|y_3^a(x,\lambda)-y_2^a(x,\lambda)| &= |\int_0^x [f^a(s,\mathbf{y}_2(s,\lambda),\lambda)-f^a(s,\mathbf{y}_1(s,\lambda),\lambda)]ds| \\
&\le |\int_0^x L\|\mathbf{y}_2(s)-\mathbf{y}_1(s)\|ds| \\
&\le ML^2|\int_0^x \frac{|s|^2}{2}ds| \\
&= ML^2\frac{|x|^3}{6}.
\end{aligned}$$

因此，Picard序列$y^a=y_k^a(x,\lambda)$在D上一致收敛。则极限函数

$$\varphi^a(x,\lambda):=\lim_{k\to\infty} y_k^a(x,\lambda), \quad (x,\lambda)\in D$$

在D上连续。利用$f^a(x,\mathbf{y},\lambda)$的连续性以及Picard序列$y_k^a(x,\lambda)$的一致收敛性，在

$$\mathbf{y}_{k+1}(x,\lambda)=\int_0^x \mathbf{f}(x,\mathbf{y}_k(x,\lambda),\lambda)dx, \quad k=0,1,2,\cdots \quad (5.44)$$

中令$k\to\infty$就得到

$$\varphi(x,\lambda)=\int_0^x \mathbf{f}(s,\varphi(s,\lambda),\lambda)ds.$$

因此$y=\varphi(x,\lambda)$是(E_λ)的解。并且同样可证明是唯一解。定理5.1由此得证。 □

Corollary 5.3.2. 推论：设n维向量值函数$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$在区域

$$R:|x-x_0|\le a, \quad \|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0\|\le b$$

上连续，而且对$\mathbf{y}$满足李氏条件。则微分方程初值问题

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{f}(x,\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0)=\eta$$

的解$\mathbf{y}=\varphi(x,\eta)$在区域

$$Q:|x-x_0|\le\frac{h}{2}, \quad |\eta-\mathbf{y}_0|\le\frac{b}{2}$$

上是连续的，其中

$$h=\min(a,\frac{b}{M}),$$

而正数M为$\|\mathbf{f}(x,\mathbf{y})\|$在区域$R$上的一个上界。

我们知道，解的存在性可以从局部延伸到大范围。同样，解对初值（或参数）的连续性也有类似的如下结论。

Theorem 5.3.3. 定理*5.2.* 设n维向量值函数$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$在$(x,\mathbf{y})$空间内的某个开区域G上是连续的，而且对$\mathbf{y}$满足局部李氏条件。假设$\mathbf{y}=\xi(x)$是微分方程

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) \quad (5.46)$$

的一个解，令它的存在区间为J。现在，在区间J内任取一个有界闭区间$a\le x\le b$，则存在常数$\delta>0$，使得对任何初值$(x_0,\mathbf{y}_0)$，

$$a\le x_0\le b, \quad \|\mathbf{y}_0-\xi(x_0)\|\le\delta,$$

柯西问题

$$(E):\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{f}(x,\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0$$

的解$\mathbf{y}=\varphi(x;x_0,\mathbf{y}_0)$也至少在区间$a\le x\le b$上存在，并且它在闭区间

$$D_\delta: a\le x\le b, \quad a\le x_0\le b, \quad \|\mathbf{y}_0-\xi(x_0)\|\le\delta$$

上是连续的。

证明：我们仍利用Picard序列逼近来证明这个定理。仅指出其中不同于局部情形的地方，省略细节推导。

注意到积分曲线段

$$\Gamma=\{(x,\mathbf{y})|\mathbf{y}=\xi(x),a\le x\le b\}$$

是G内的一个有界闭集。因此，利用有限覆盖定理可知，存在$\sigma>0$，使得以Γ为中心线的闭管状邻域

$$\Sigma_\sigma: a\le x\le b, \|\mathbf{y}-\xi(x)\|\le\sigma$$

坐落在开区域G内；并且$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$在Σ_σ内有整体李氏常数L。

设$(x_0,\mathbf{y}_0)\in\Sigma_\sigma$。我们可以构造（E）的Picard序列：

$$\varphi_{k+1}(x;x_0,\mathbf{y}_0)=\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(x,\varphi_k(x;x_0,\mathbf{y}_0))dx, \quad (5.47)$$

这里不同之处是我们选取（它是$\mathbf{y}=\xi(x)$的平移）

$$\varphi_0(x;x_0,\mathbf{y}_0)=\mathbf{y}_0+\xi(x)-\xi(x_0). \quad (5.48)$$

然后，要证明

$$\|\varphi_k(x;x_0,\mathbf{y}_0)-\xi(x)\|<\sigma \quad (5.49)$$

这保证所作Picard序列$\mathbf{y}=\varphi_k(x;x_0,\mathbf{y}_0)$都不超出区域$\Sigma_\sigma$；以及证明

$$\|\varphi_{k+1}(x;x_0,\mathbf{y}_0)-\varphi_k(x;x_0,\mathbf{y}_0)\|\leq\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}\|\mathbf{y}_0-\xi(x_0)\|,\quad k=0,1,2,\cdots$$

这保证Picard序列的一致收敛性。

为此，我们取正数

$$\delta=\frac{1}{2}e^{-L(b-a)}\sigma<\sigma\quad(5.51)$$

则当$(x;x_0,\mathbf{y}_0)\in D_\delta$时，可以归纳地证明（5.49）和（5.50）成立。

事实上，当$k=0$时，（5.49）从（5.48）直接得到。因为$\mathbf{y}=\xi(x)$为（5.46）的解，从而满足积分方程

$$\xi(x)=\xi(x_0)+\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(x,\xi(x))dx.$$

因此，

$$\begin{aligned}\|\varphi_1(x;x_0,\mathbf{y}_0)-\varphi_0(x;x_0,\mathbf{y}_0)\| &= \|\int_{x_0}^{x}[\mathbf{f}(x,\varphi_0(x;x_0,\mathbf{y}_0))-\mathbf{f}(x,\xi(x))]dx\|\\ &\leq |\int_{x_0}^{x}L\|\mathbf{y}_0-\xi(x_0)\|dx|=L|x-x_0|\|\mathbf{y}_0-\xi(x_0)\|,\end{aligned}$$

即（5.50）对$k=0$成立。

现在设（5.49）和（5.50）对$k\leq m-1$成立，则当$k=m$并且$(x,x_0,\mathbf{y}_0)\in D_\delta$时，

$$\begin{aligned}\|\varphi_m(x;x_0,\mathbf{y}_0)-\xi(x)\| &= |\sum_{k=1}^{m}[\varphi_k(x;x_0,\mathbf{y}_0)-\varphi_{k-1}(x;x_0,\mathbf{y}_0)]+[\varphi_0(x;x_0,\mathbf{y}_0)-\xi(x)]|\\ &\leq \sum_{k=0}^{m}\frac{(L|x-x_0|)^k}{k!}\|\mathbf{y}_0-\xi(x_0)\|\leq e^{L|x-x_0|}\delta\leq e^{L(b-a)}\delta<\sigma.\end{aligned}$$

即（5.49）对$k=m$成立。对于（5.50），由归纳假设和Lipschitz条件得

$$\begin{aligned}&\|\varphi_{m+1}(x;x_0,\mathbf{y}_0)-\varphi_m(x;x_0,\mathbf{y}_0)\|\\ =& \|\int_{x_0}^{x}[\mathbf{f}(x,\varphi_m(x;x_0,\mathbf{y}_0))-\mathbf{f}(x,\varphi_{m-1}(x;x_0,\mathbf{y}_0))]dx\|\\ \leq& |\int_{x_0}^{x}L\|\varphi_m(x;x_0,\mathbf{y}_0)-\varphi_{m-1}(x;x_0,\mathbf{y}_0)\|dx|\\ \leq& |\int_{x_0}^{x}L\frac{(L|x-x_0|)^m}{m!}\|\mathbf{y}_0-\xi(x_0)\|dx|=\frac{(L|x-x_0|)^{m+1}}{(m+1)!}\|\mathbf{y}_0-\xi(x_0)\|.\end{aligned}$$

即（5.50）对$k=m$成立。由（5.50），$\varphi_k(x;x_0,\mathbf{y}_0)$在$D_\delta$上一致收敛，从而它的极限函数$\varphi(x;x_0,\mathbf{y}_0)$为（E）的解。 □

作业：5-3：2

§5.4 解对初值和参数的连续可微性

本节将讨论微分方程的解对初值和参数的连续可微性。如上节一样，不失一般性，我们只考虑微分方程

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda) \quad (5.52)$$

满足初值条件

$$\mathbf{y}(0) = 0$$

的解$\mathbf{y} = \varphi(x, \lambda)$对参数$\lambda$的连续可微性。

Theorem 5.4.1. *定理5.3. 设$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda)$在区域*

$$G : |x| \le a, \quad \|\mathbf{y}\| \le b, \quad \|\lambda - \lambda_0\| \le c$$

上连续，而且对$\mathbf{y}, \lambda$有连续的偏微商。则微分方程（5.52）满足初值条件$\mathbf{y}(0) = 0$的解$\mathbf{y} = \varphi(x, \lambda)$在区域

$$D : |x| \le h, \quad \|\lambda - \lambda_0\| \le c$$

上是连续可微的，其中正数h的定义同上节定理5.1.

第六章　线性微分方程组

在数学的一些实际应用中有许多涉及到非线性微分方程的问题。通常对它们采用线性化的方法简化为线性微分方程的问题，这样往往可以获得比较简捷的解答（如上一章单摆的例子）。本章的主题是线性微分方程组的一般理论和一些解法。它们是微分方程实际应用的工具，而且也是理论分析的基础。

我们首先在6.1节介绍线性微分方程组的一般理论，再在6.2节讨论常系数线性微分方程组的初等解法，并在6.3节把上两节的结论应用到线性的高阶微分方程式。

§6.1　一般理论

考虑标准形式的n阶线性微分方程组

$$\frac{dy^i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y^j + f_i(x), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中系数函数$a_{ij}(x)$和$f_i(x)$在区间$a < x < b$上都是连续的。在上一章5.2节我们已指出，只要采用矩阵和向量的记号，就可以把上面的线性微分方程组写成向量的形式

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{f}(x). \quad (6.1)$$

当$\mathbf{f}(x)$不恒为零时，称（6.1）为非齐次的线性微分方程组；当$\mathbf{f}(x) \equiv 0$时，即

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}, \quad (6.2)$$

称它是（相应）齐次的线性微分方程组。n阶线性微分方程组与一阶线性微分方程不仅在形式上相似，而且在理论上相似。

下面的定理是本章的理论基础。

Theorem 6.1.1. 存在和唯一性定理 *线性微分方程组（6.1）满足初值条件*

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \quad (6.3)$$

的解$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$在区间$a < x < b$上是存在和唯一的，其中初值$x_0 \in (a, b)$和$\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$是任意给定的。

证明：由$\mathbf{A}(x)$的连续性可知，在x的任意有限闭区间上，函数$\mathbf{A}(x)\mathbf{y}$对$\mathbf{y}$满足李氏条件，因此由第三章定理3.1（Picard定理），有局部存在唯一性。根据定理3.5，如果方程右端关于$\mathbf{y}$至多线性增长，类似证明解可以延拓到区间(a, b)。

§6.1.1 齐次线性微分方程组

Lemma 6.1.2. 引理*6.1.* 设$\mathbf{y}=\mathbf{y}_1(x)$和$\mathbf{y}=\mathbf{y}_2(x)$是齐次线性微分方程组（*6.2*）的解，则它们的线性组合

$$y=C_1\mathbf{y}_1(x)+C_2\mathbf{y}_2(x) \quad (6.4)$$

也是方程组（*6.2*）的解，其中C_1,C_2是（实的）任意常数。

证明：将（6.4）代入（6.2），仍满足方程。 □

以下令齐次线性微分方程组（6.2）在区间(a,b)上所有的解组成的集合为S。则由引理6.1可知：集合S是一个线性空间。所以我们可以用线性代数的语言来描述S的结构。

Lemma 6.1.3. 引理*6.2.* 线性空间S是n维的（这里n是微分方程组（*6.2*）的阶数）。

证明：注意，解构成的线性空间S的维数与A的秩无关。例如即使$\mathbf{A}\equiv 0$，解空间$\mathbf{y}=(c_1,\cdots,c_n)^T$仍然是$n$维的。

令$x_0\in(a,b)$是固定的。则由上面的存在和唯一性定理推出，对于任何常数向量$\mathbf{y}_0\in\mathbb{R}^n$，在$S$ 中存在唯一的元素$\mathbf{y}(x)$，使得$\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0$。这样一来，我们就得到一个映射

$$H:\mathbf{y}_0\mapsto\mathbf{y}(x);\quad \mathbb{R}^n\to S. \quad (6.5)$$

对于任意$\mathbf{y}_1^0,\mathbf{y}_2^0\in\mathbb{R}^n$，令

$$\mathbf{y}_1(x)=H(\mathbf{y}_1^0),\quad \mathbf{y}_2(x)=H(\mathbf{y}_2^0).$$

由引理6.1，

$$H(C_1\mathbf{y}_1^0+C_2\mathbf{y}_2^0)=C_1H(\mathbf{y}_1^0)+C_2H(\mathbf{y}_2^0),$$

即映射H是一个线性映射。

显然，H是单射（不同的初值显然对应不同的解）。H也是满射：对于任何$\mathbf{y}(x)\in S$，我们有

$$\mathbf{y}(x_0)\in\mathbb{R}^n,\quad H(\mathbf{y}(x_0))=\mathbf{y}(x).$$

所以映射H是满的。

因此H是从$\mathbb{R}^n$到S的线性同构，所以S的维数等于$\mathbb{R}^n$的维数n，它就是微分方程组（6.2）的阶数。 □

任给m个向量值函数$\mathbf{y}_k(x), k=1,2,\cdots,m$，称它们线性无关指的是

$$C_1\mathbf{y}_1(x)+\cdots+C_m\mathbf{y}_m(x)=0,$$

蕴含$C_1=\cdots=C_m=0$。

令$\mathbf{y}_k^0\in\mathbb{R}^n$和$\mathbf{y}_k(x)=H(\mathbf{y}_k^0)$，$k=1,2,\cdots,m$。则$\{\mathbf{y}_1^0,\cdots,\mathbf{y}_m^0\}$在$\mathbb{R}^n$中线性无关等价于$\{\mathbf{y}_1(x),\cdots,\mathbf{y}_m(x)\}$在$S$中线性无关（因为$\{\mathbf{y}_k^0\}$线性无关则显然$\{\mathbf{y}_k(x)\}$线性无关，$\{\mathbf{y}_k^0\}$线性相关则$\{\mathbf{y}_k(x)\}$线性相关）。

现在，我们来证本节的主要结论。

Theorem 6.1.4. *定理6.1. 齐次线性微分方程组（6.2）在区间$a<x<b$上有n个线性无关的解*

$$\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\quad (6.6)$$

而且它的通解为

$$y=C_1\varphi_1(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x),\quad (6.7)$$

其中$C_1,\cdots,C_n$是任意常数。

证明：利用引理6.2，我们可以得到S的一个基，不妨把它记作（6.6）。因此，它的线性组合生成整个线性空间S。这就是说，（6.7）式表示齐次线性微分方程组（6.2）的通解。 □

通常称齐次线性微分方程组（6.2）的n个线性无关的解为一个基本解组。因此，求（6.2）的通解只需要求它的一个基本解组。

假设已知

$$\mathbf{y}_1(x),\cdots,\mathbf{y}_n(x)\quad (6.8)$$

是微分方程组（6.2）的n个解（一个解组）。则问题归于判别它们是否线性无关。事实上，取任意$x_0\in(a,b)$作为初值点，则解的线性无关性等价于$\{\mathbf{y}_k(x_0)\}_{k=1}^n$是否线性无关。

设在（6.8）中诸解的分量形式为

$$\mathbf{y}_1(x)=(y_1^k(x))^T,\quad\cdots,\quad \mathbf{y}_n(x)=(y_n^k(x))^T,$$

定义解组（6.8）的朗斯基（Wronsky）行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & \cdots & y_n^1(x)\\ y_1^2(x) & y_2^2(x) & \cdots & y_n^2(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \cdots & y_n^n(x)\end{vmatrix}$$

Lemma 6.1.5. *引理6.3. 上述朗斯基行列式满足下面的刘维尔公式*

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} tr[A(x)]dx}, \quad a < x < b. \quad (6.9)$$

证明：行列式对x求导等于分别对某一行求导后的行列式相加，并利用

$$\frac{dy_k^i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_k^j(x),$$

可得

$$\frac{dW}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)W(x) = tr[A(x)]W(x).$$

这是关于W的一阶线性微分方程，由此解出W，即得（6.9）。

或者考虑

$$\frac{d}{ds}|_{s=0}Y(s) = AY, \quad Y(s) = e^{sA}Y, \quad \det(e^{sA}Y) = e^{str(A)}\det(Y)$$

□

【附注1】由刘维尔公式（6.9）可见，解组（6.8）的朗斯基行列式$W(x)$在区间$a < x < b$ 上只有两种可能：恒等于零，或恒不等于零。下面的定理说明，这两种可能分别对应解组（6.8）的线性相关性和线性无关性。

Theorem 6.1.6. *定理6.2. 线性微分方程组（6.2）的解组（6.8）是线性无关的充要条件为（任一x或所有x）*

$$W(x) \neq 0, \quad a < x < b. \quad (6.10)$$

证明：由刘维尔公式可知，（6.10）等价于$W(x_0) \neq 0$，它又等价于初值向量组

$$\mathbf{y}_1(x_0), \cdots, \mathbf{y}_n(x_0) \quad (6.11)$$

在$\mathbb{R}^n$中是线性无关的，等价于解组（6.8）在S中是线性无关的。 □

Corollary 6.1.7. *推论6.1. 解组（6.8）是线性相关的充要条件为*

$$W(x) \equiv 0, \quad a < x < b.$$

由刘维尔公式可知，朗斯基行列式$W(x) \equiv 0$等价于在某一特殊点x_0的$W(x_0) = 0$。因此，在应用中我们只需计算$W(x_0)$是否等于零，就可得知解组（6.8）是否线性无关。

n阶微分方程组的n个解，即解组$\{\mathbf{y}_j, j=1,\cdots,n\}$可构成一个解矩阵

$$\mathbf{Y}(x)=(y_j^i(x))_{n\times n}.$$

容易知

$$\frac{d\mathbf{Y}(x)}{dx}=(\frac{dy_j^i(x)}{dx})_{n\times n}=(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(x)y_j^k(x))_{n\times n}=(a_{ik}(x))_{n\times n}(y_j^k(x))_{n\times n}=\mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x).$$

方程组（6.2）的解组与上式的矩阵解一一对应。

当解组（6.8）是一个基本解组时，称相应的解矩阵$\mathbf{Y}(x)$为一个基解矩阵。若已知方程组（6.2）的一个基解矩阵$\Phi(x)$，则由定理6.1可知，它的通解为

$$\mathbf{y}=\Phi(x)\mathbf{c},\quad (6.15)$$

其中$\mathbf{c}$是n维的任意常数列向量。

Corollary 6.1.8. *推论6.2.*（*1*）*设*$\Phi(x)$*是方程组*（*6.2*）*的一个基解矩阵，则对于任一个非奇异的*n*阶常数矩阵*$\mathbf{C}$*，矩阵*

$$\Psi(x)=\Phi(x)\mathbf{C},\quad (6.16)$$

也是（*6.2*）*的一个基解矩阵；*

（*2*）*设*$\Phi(x)$*和*$\Psi(x)$*都是方程组*（*6.2*）*的基解矩阵，则必存在一个非奇异的*n*阶常数矩阵*$\mathbf{C}$*使得*（*6.16*）*成立。*

§6.1.2 非齐次线性微分方程组

现在，我们可以利用上面6.1.1节的结果来推导非齐次n阶线性微分方程组（6.1）的通解结构。

Lemma 6.1.9. *引理6.4. 如果*$\Phi(x)$*是与*（*6.1*）*相应的齐次线性微分方程组*（*6.2*）*的一个基解矩阵，*$\varphi^*(x)$*是*（*6.1*）*的一个特解，则*（*6.1*）*的任一解*$y=\varphi(x)$*可以表示成*

$$\varphi(x)=\Phi(x)\mathbf{c}+\varphi^*(x),$$

其中$\mathbf{c}$*是一个与*$\varphi(x)$*有关的常数列向量。*

证明：容易验证$\varphi(x)-\varphi^*(x)$是（6.2）的一个解。因此，由（6.15）可知，存在常数列向量$\mathbf{c}$ 使得

$$\varphi(x)-\varphi^*(x)=\Phi(x)\mathbf{c}.$$

□

引理6.4说明，为了得出（6.1）的通解，需要知道（6.2）的一个基解矩阵$\Phi(x)$和（6.1）的一个特解$\varphi^*(x)$。而且，利用下述常数变易法，我们只要知道$\Phi(x)$就够了。

假定（6.1）有如下形式的特解：

$$\varphi^*(x) = \Phi(x)\mathbf{c}(x), \quad (6.17)$$

其中$\mathbf{c}(x)$是待定的向量值函数。把（6.17）代入方程（6.1）得到

$$\Phi'(x)\mathbf{c}(x) + \Phi(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{A}(x)\Phi(x)\mathbf{c}(x) + \mathbf{f}(x). \quad (6.18)$$

另一方面，由于$\Phi(x)$是（6.2）的解矩阵，即$\Phi'(x) = \mathbf{A}(x)\Phi(x)$，因此由（6.18）消去相应的项得到

$$\Phi(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{f}(x). \quad (6.19)$$

又由于$\Phi(x)$是（6.2）的基解矩阵，所以它所对应的朗斯基行列式$\det[\Phi(x)] \neq 0, a < x < b$。这蕴含$\Phi(x)$是可逆矩阵。因此，可由（6.19）推出

$$\mathbf{c}'(x) = \Phi^{-1}\mathbf{f}(x),$$

从而

$$\mathbf{c}(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds.$$

把上式代回（6.17）式，就得到非齐次线性微分方程组的一个特解

$$\varphi^*(x) = \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds. \quad (6.20)$$

这样我们就得到：

Lemma 6.1.10. *引理6.5. 设$\Phi(x)$是（6.2）的一个基解矩阵，则（6.20）式给出非齐次线性微分方程组（6.1）的一个特解。* □

结合引理6.4和引理6.5，我们就有下面的结论。

Theorem 6.1.11. *定理6.3. 设$\Phi(x)$是（6.2）的一个基解矩阵，则非齐次线性方程组（6.1）在区间$a < x < b$上的通解可以表示为*

$$\mathbf{y} = \Phi(x)(\mathbf{c} + \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds), \quad (6.21)$$

其中$\mathbf{c}$为n维的任意常数列向量；而且（6.1）满足初值条件$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$的解为

$$\mathbf{y} = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds, \quad x_0 \in (a, b). \quad (6.22)$$

【附注2】我们利用上面的常数变易法得到公式（6.21）和（6.22）。它们依赖于方程组（6.2）的一个基解矩阵$\Phi(x)$。一般而言，我们无法求出$\Phi(x)$的有限形式。也就是说，（6.21）和（6.22）所提供的仅是一种结构性的公式。尽管如此，它们在微分方程以及相关的数学分支中（特别在一些理论问题的研究中）仍是常用的重要公式。在某些特殊情形下，针对矩阵$\mathbf{A}(x)$的特点，可以求出（6.2）的一个基解矩阵的有限形式。

【例1（4）】：求齐次线性微分方程组的通解：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

解：由$\frac{dy^2}{dt} = y^2$得

$$y^2 = c_1 e^t,$$

由$\frac{dy^1}{dt} = y^3, \frac{dy^3}{dt} = y^1$得

$$\frac{d^2y^1}{dt^2} = y^1, \frac{d^2y^3}{dt^2} = y^3$$

$$y^1 = c_2e^t + c_3e^{-t}, \quad y^3 = c_2e^t - c_3e^{-t}.$$

即

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ 0 & e^t & 0 \\ e^t & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

作业：6-1：1（2，3），2（1），5，6

§6.2 常系数线性微分方程组

我们在上一节指出，常微分方程组$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=A(x)\mathbf{y}+\mathbf{f}(x)$的求解关键在求相应齐次方程的基解矩阵（线性无关的$n$个解作为列向量构成的矩阵）。但由于基解矩阵$\Phi(x)$只是理论上的存在性，所以公式（6.21）和（6.22）并没有完全解决微分方程组（6.1）的求解问题。本节把讨论的范围限于常系数的情形（欧拉、伯努利儿子：弹性问题出现4阶常微分常系数方程$K^4\frac{d^4y}{dx^4}=y$），则我们可以利用矩阵的指数函数解决相应的求解问题。

所谓常系数线性微分方程组，指的是线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=A\mathbf{y}+\mathbf{f}(x)\quad(6.24)$$

中的系数矩阵A为n阶常数矩阵，而$\mathbf{f}(x)$是在$a<x<b$上连续的向量函数。我们已经知道，求解线性微分方程组（6.24）的关键是求出相应齐次线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=A\mathbf{y}\quad(6.25)$$

的一个基解矩阵。当$n=1$时，矩阵A就是一个实数a，这时方程（6.25）成为

$$\frac{dy}{dx}=ay,\quad(6.26)$$

它的通解为$y=Ce^{ax}$，其中C为任意常数。换句话说，e^{ax}是方程（6.26）的一个（一阶的）基解矩阵。

类似的，当$A=diag(a_1,\cdots,a_n)$时，通解为

$$\mathbf{y}=(c_1e^{a_1x},\cdots,c_ne^{a_nx})^T=diag(e^{a_1x},\cdots,e^{a_nx})\mathbf{c}.$$

如果$\mathbf{r}=(r_1,\cdots,r_n)$使得$\mathbf{r}A=\lambda\mathbf{r}$，则

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{ry})=\mathbf{r}A\mathbf{y}=\lambda\mathbf{ry},$$

由此会对求解微分方程有所帮助。

例：求解

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=A\mathbf{y}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\mathbf{y}.$$

解：

$$\frac{d}{dx}(y^1-iy^2)=-i(y^1-iy^2),\quad \frac{d}{dx}(y^1+iy^2)=i(y^1+iy^2),$$

从而求解出（$A=i$）

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\mathbf{c}=e^{ix}(c_1+ic_2).$$

可见求常系数线性微分方程组（6.25）的基解矩阵与矩阵A的特征值（拉格朗日）和向量有很大关联，事实上得到的基解矩阵都是e^{xA}。

§6.2.1 矩阵指数函数的定义和性质

令$\mathcal{M}$表示由所有n阶（复常数）矩阵构成的集合，构成一个（复）线性空间。对$\mathcal{M}$中的任何元素

$$A=(a_{ij})_{n\times n},$$

定义它的模为

$$\|A\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

则我们容易证明：

（1）$\|A\|\geq 0$；而且$\|A\|=0$当且仅当$A=0$（零矩阵）。

（2）对任意$A,B\in\mathcal{M}$，有不等式（三角不等式）

$$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|.$$

（3）$\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|,\lambda\in\mathbb{C}$。

在$\mathcal{M}$定义了模$\|\cdot\|$，就可以仿照实数域中的数学分析来定义矩阵无穷级数、柯西矩阵序列、及其收敛性的概念。而且容易证明，在$\mathcal{M}$中任何柯西序列都是收敛的，即线性空间$\mathcal{M}$是完备的。

另外，在$\mathcal{M}$中还特别有乘法运算，即对于任意$A,B\in\mathcal{M}$，有$AB\in\mathcal{M}$。而且，

（4）$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$。

利用上面性质，我们有

$$\|A^k\|\leq\|A\|^k,\quad k\geq 1.$$

通常令$A^0=E$。上面的不等式对$k=0$不能成立。由上述不等式不难证明矩阵A的幂级数绝对收敛

$$E+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k+\cdots$$

现以记号e^A或$\exp A$表示上述矩阵幂级数的和，并称它为矩阵A的指数函数，即

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathcal{M}.$$

现在，我们考察一般矩阵指数函数的性质。

命题2. 矩阵指数函数有下面的性质：

（1）若矩阵A, B是可交换的（即$AB = BA$），则

$$e^{A+B} = e^A e^B;$$

因$\frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!}$。

（2）对任何矩阵A，指数函数e^A是可逆的，且

$$(e^A)^{-1} = e^{-A};$$

（3）若P是一个非奇异的n阶矩阵，则

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}.$$

例：$A = diag(a_1, \cdots, a_n), a_i \in \mathbb{C}$，求$e^{xA}$。

解：

$$\begin{aligned} e^{xA} &= E + diag(xa_1, \cdots, xa_n) + \frac{1}{2!} diag((xa_1)^2, \cdots, (xa_n)^2) + \cdots \\ &= diag(e^{a_1 x}, \cdots, e^{a_n x}). \end{aligned}$$

例：设J为形如一个若当块的k阶矩阵：$J = \lambda E + Z$（其中$\lambda \in \mathbb{C}$，Z只有对角线上方的斜线上元素为1，其余元素为零），求e^{xJ}。

解：

$$e^{xJ} = e^{x\lambda E + xZ} = e^{x\lambda E} e^{xZ} = e^{\lambda x} e^{xZ},$$

e^{xZ}也容易由定义式表示出来，其级数只有n项非零。

§6.2.2 常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵

现在，我们可以利用矩阵指数函数求得常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵，从而得到它的通解。

Theorem 6.2.1. *定理6.4. 矩阵指数函数$\Phi(x)=e^{xA}$是常系数齐次线性微分方程组（6.25）的一个标准基解矩阵（即基解矩阵$\Phi(x)$满足$\Phi(0)=E$）。*

证明：在自变量x的任意有限区间上，矩阵指数函数

$$\Phi(x)=e^{xA}=E+xA+\frac{x^2}{2!}A^2+\cdots+\frac{x^k}{k!}A^k+\cdots$$

是一致收敛的，可以逐项微分得到

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}e^{xA}=A+xA^2+\frac{x^2}{2!}A^3+\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^k+\cdots\\ &= A(E+xA+\frac{x^2}{2!}A^2+\cdots+\frac{x^k}{k!}A^k+\cdots)\\ &= Ae^{xA}=A\Phi(x).\end{aligned}$$

这说明$\Phi(x)$是（6.25）的一个解矩阵。

另一方面，由于$\Phi(0)=E$，所以$\det[\Phi(0)]=1$。这就证明了$\Phi(x)$是（6.25）的一个标准基解矩阵。 □

但对于变系数齐次线性常微分方程组，

$$e^{\int_{x_0}^x A(s)ds}:=e^{B(x)},\quad b_{ij}(x)=\int_{x_0}^x a_{ij}(s)ds,$$

一般不是一个基解矩阵（因为A,B一般不可交换）：

$$\frac{d}{dx}e^{B(x)}\neq A(x)e^{B(x)}.$$

拉格朗日利用伴随方程的特解可得到降阶法求解高阶变系数非齐次线性方程和方程组。并利用常数变易法求解特解。

定理6.3. 设$\Phi(x)$是（6.2）的一个基解矩阵，则非齐次线性方程组（6.1）在区间$a<x<b$上的通解可以表示为

$$\mathbf{y}=\Phi(x)(\mathbf{c}+\int_{x_0}^x\Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds),\quad (6.21)$$

其中$\mathbf{c}$为n维的任意常数列向量；而且（6.1）满足初值条件$\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0$的解为

$$\mathbf{y}=\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0+\Phi(x)\int_{x_0}^x\Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds,\quad x_0\in(a,b).\quad (6.22)$$

把定理6.4应用到定理6.3，并注意到命题2中的结论（1）和（2），则立即可得

Corollary 6.2.2. 推论*6.3.* 常系数非齐次线性微分方程组（*6.24*）在区间(a,b)上的通解为

$$\mathbf{y} = e^{xA}\mathbf{c} + \int_{x_0}^{x} e^{(x-s)A}\mathbf{f}(s)ds, \quad (6.27),$$

其中c为任意一个常数列向量；而（*6.24*）满足初值条件$y(x_0) = y_0$的解为

$$\mathbf{y} = e^{(x-x_0)A}\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} e^{(x-s)A}\mathbf{f}(s)ds, \quad x_0 \in (a,b). \quad (6.28)$$

§6.2.3 利用若尔当标准型求基解矩阵

现在，我们要进一步解决的问题是，求解这种用矩阵无穷级数定义的指数函数e^{xA}。对任意n阶矩阵A，存在n阶非奇异矩阵P，使得

$$A = PJP^{-1},$$

其中$J = diag(J_1, \cdots, J_m)$，其中$J_i = \lambda_i E + Z_i$为一个$n_i$阶的若当块，$n_1 + \cdots + n_m = n$。因此

$$e^{xA} = e^{xPJP^{-1}} = Pe^{xJ}P^{-1} = Pdiag(e^{xJ_1}, \cdots, e^{xJ_m})P^{-1}.$$

另外，

$$e^{xA}P = Pe^{xJ} = Pdiag(e^{xJ_1}, \cdots, e^{xJ_m}) := B + iC \quad (6.35)$$

也是一个基解矩阵（$\frac{d}{dx}[e^{xA}P] = Ae^{xA}P$，$e^{xA}P$是复矩阵。但左乘$P^{-1}$不再是基解矩阵），可以简化计算，但过渡矩阵$P$，若当标准型$J$ 的计算量仍然很大。所以有必要寻找比较简便的替代方法。

§6.2.4 待定指数函数法（欧拉）

现在我们可以把上面由理论分析所得的公式（6.35）应用于下面的待定系数法，以便确定方程组$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{Ay}$相应的基解矩阵。

由于矩阵A的若当标准型依赖于它的特征根的重数，我们将区分两种不同的情形：

（一）A只有单的特征值

设A的特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$均为单特征值，因此互不相同。则$A$的若当标准型$J$ 就是一个对角矩阵（复矩阵），因此得到基解矩阵

$$\Phi(x) = e^{xA}P = Pdiag(e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}).$$

并且由$\Phi(0)=P$，可得到实的标准基解矩阵

$$e^{xA}=\Phi(x)\Phi^{-1}(0). \quad (6.36)$$

因此，问题归于如何确定矩阵P。令$\mathbf{r}_i$表示P的第i列的向量，则基解矩阵

$$\Phi(x)=(e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1,\cdots,e^{\lambda_n x}\mathbf{r}_n).$$

它告诉我们$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=A\mathbf{y}$有如下形式的解（其实部和虚部也都是解）：

$$e^{\lambda_i x}\mathbf{r}_i.$$

Lemma 6.2.3. *引理6.6. 微分方程$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=A\mathbf{y}$有非零解$\mathbf{y}=e^{\lambda x}\mathbf{r}$，当且仅当$\lambda$是矩阵$A$的特征值，而$r$是相应于$\lambda$的特征向量。*

证明：$\mathbf{y}=e^{\lambda x}\mathbf{r}$为微分方程的解当且仅当

$$\lambda e^{\lambda x}\mathbf{r}=Ae^{\lambda x}\mathbf{r}$$

即等价于求特征值与相应的特征向量

$$(A-\lambda E)\mathbf{r}=0.$$

□

Theorem 6.2.4. *定理6.5. 设A有n个互不相同的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$以及相应的特征向量$\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_n$，则*

$$\Phi(x)=(e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1,\cdots,e^{\lambda_n x}\mathbf{r}_n)$$

是$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=A\mathbf{y}$的一个基解矩阵。

证明：由引理6.6，$\Phi(x)$是方程的解矩阵。另一方面，对应于不同特征值的特征向量组是线性无关的，所以

$$\det\Phi(0)=\det[\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_n]\neq 0.$$

从而$\Phi(x)$是一个基解矩阵。

为了得到所需的实基解矩阵，可以利用（6.36）得到实的标准基解矩阵$e^{xA}=\Phi(x)\Phi(0)^{-1}$。因为右乘非奇异矩阵仍然是基解矩阵，并且由下式及它在$x=0$是单位矩阵可知它是实矩阵（利用方程组解的唯一性）

$$\frac{d}{dx}[\Phi(x)\Phi(0)^{-1}]=A(x)[\Phi(x)\Phi(0)^{-1}].$$

或者，将$\Phi(x)$分解为$\Phi(x)=B(x)+iC(x)$，则其实部与虚部都是解矩阵，它们的列向量都是解，并且联合组成的矩阵$(B(x),C(x))$的秩为n。因此可以选取n个线性无关的解构成一个基解矩阵。 $\square$

例；求解微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{y}$$

解：$\det(\lambda E-A)=\lambda^2-2\lambda+2$，因此特征值为

$$\lambda_1=1+i,\quad \lambda_2=1-i.$$

相应特征向量可取为

$$\mathbf{r}_1=(1,i)^T,\quad \mathbf{r}_2=(1,-i)^T.$$

因此得到解矩阵

$$\Phi(x)=(e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1,e^{\lambda_2 x}\mathbf{r}_2)=\begin{pmatrix}e^{(1+i)x} & e^{(1-i)x}\\ ie^{(1+i)x} & -ie^{(1-i)x}\end{pmatrix}=e^x\begin{pmatrix}e^{ix} & e^{-ix}\\ ie^{ix} & -ie^{-ix}\end{pmatrix}.$$

因此，可得标准基解矩阵

$$e^{xA}=\Phi(x)\Phi^{-1}(0)=e^x\begin{pmatrix}e^{ix} & e^{-ix}\\ ie^{ix} & -ie^{-ix}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}=e^x\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}.$$

因此得到通解

$$\mathbf{y}=C_1e^x(\cos x,-\sin x)^T+C_2e^x(\sin x,\cos x)^T.$$

或者由下面分解（事实上$e^{\lambda_1 x}\mathbf{r}_1$已经足够）选出基本解组

$$\Phi(x)=e^x\begin{pmatrix}\cos x & \cos x\\ -\sin x & -\sin x\end{pmatrix}+ie^x\begin{pmatrix}\sin x & -\sin x\\ \cos x & -\cos x\end{pmatrix}$$

作业：6-2：1（1，2，4），2（2），3（2），4

（二）A有相重的特征值

假设矩阵A的互不相同的特征值为$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，相应的重数分别为正整数$n_1, \cdots, n_2(n_1 + \cdots + n_s = n)$。在$A$的若当标准型$J$中，与$\lambda_i$相对应的若当块可能不止一个，这些若当块的阶数之和为n_i，记其中一块为$J_p = \lambda_i E_p + Z_p$（阶为$p$）。我们可以把基解矩阵的某一列表示出

$$\begin{aligned} e^{xA}P &= Pe^{xJ} = Pdiag(e^{x(\lambda_i E_p + Z_p)}) = (\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n) diag(e^{\lambda_i x} e^{xZ_p}) \\ &= diag(e^{\lambda_i x}(\mathbf{r}_0 + x\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2!}x^2\mathbf{r}_2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}\mathbf{r}_{p-1})), \end{aligned}$$

其中这里$\mathbf{r}_0, \cdots, \mathbf{r}_{p-1}$取的是相应的倒序的$\mathbf{p}_{l-1}, \cdots, \mathbf{p}_{l-p}$。所以我们已经知道如上形式的列向量一定可以构成一个基解矩阵。接下来，对一般情形我们待定一个复数值的解，形如

$$e^{\lambda_i x}(\mathbf{r}_0 + x\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2!}x^2\mathbf{r}_2 + \cdots + \frac{1}{(n_i-1)!}x^{n_i-1}\mathbf{r}_{n_i-1}), \quad (6.39)$$

主要问题是如何确定$\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 \cdots, \mathbf{r}_{n_i-1}$。

Lemma 6.2.5. 引理*6.7.* 设λ_i是矩阵A的n_i重特征值，则齐次方程有形如（*6.39*）的非零解的充要条件是：$\mathbf{r}_0$是齐次线性代数方程组

$$(A - \lambda_i E)^{n_i}\mathbf{r} = 0 \quad (6.40)$$

的一个非零解，而且（*6.39*）中的$\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_{n_i-1}$由下面关系式逐次确定：

$$\mathbf{r}_k = (A - \lambda_i E)\mathbf{r}_{k-1}, \quad k = 1, \cdots, n_i - 1. \quad (6.41)$$

证明：(6.39) 为$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y}$的解当且仅当

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{dx} &= \lambda_i e^{\lambda_i x}(\mathbf{r}_0 + x\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2!}x^2\mathbf{r}_2 + \cdots + \frac{1}{(n_i-1)!}x^{n_i-1}\mathbf{r}_{n_i-1}) \\ &\quad + e^{\lambda_i x}(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}_2 + \cdots + \frac{1}{(n_i-2)!}x^{n_i-2}\mathbf{r}_{n_i-1}) \\ &= Ae^{\lambda_i x}(\mathbf{r}_0 + x\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2!}x^2\mathbf{r}_2 + \cdots + \frac{1}{(n_i-1)!}x^{n_i-1}\mathbf{r}_{n_i-1}), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &(A - \lambda_i E)(\mathbf{r}_0 + x\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2!}x^2\mathbf{r}_2 + \cdots + \frac{1}{(n_i-1)!}x^{n_i-1}\mathbf{r}_{n_i-1}) \\ = \ &\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}_2 + \cdots + \frac{1}{(n_i-2)!}x^{n_i-2}\mathbf{r}_{n_i-1}. \end{aligned}$$

当且仅当

$$(A-\lambda_iE)\mathbf{r}_j=\mathbf{r}_{j+1},\quad j=0,1,\cdots,n_i-2;\quad (A-\lambda_iE)\mathbf{r}_{n_i-1}=0,$$

即

$$\mathbf{r}_{j+1}=(A-\lambda_iE)^{j+1}\mathbf{r}_0,\quad j=0,1,\cdots,n_i-2;\quad (A-\lambda_iE)^{n_i}\mathbf{r}_0=0.$$

又（6.39）非零当且仅当$\mathbf{r}_0$非零。引理得证。注意，在$\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_{n_i-1}$ 中可能出现后面若干个为零，其实x的最高幂次等于λ_i的若当子块的最高阶数减1。 □

Lemma 6.2.6. *命题4.* 设矩阵A的互不相同的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，它们的重数分别是$n_1,\cdots,n_s(n_1+\cdots+n_s=n)$。记$n$维常数列向量所组成的（复）线性空间为$V$，则

（*1*）V的子集合

$$V_i=\{\mathbf{r}\in V|(A-\lambda_iE)^{n_i}\mathbf{r}=0\}$$

是矩阵A的n_i维不变子空间。

（*2*）V有直和分解$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$。

Theorem 6.2.7. *定理6.6.* 设n阶实值矩阵A有互不相同的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，它们的重数分别是$n_1,\cdots,n_s(n_1+\cdots+n_s=n)$。则常系数齐次线性微分方程组有基解矩阵

$$(e^{\lambda_1x}P_1^{(1)}(x),\cdots,e^{\lambda_1x}P_{n_1}^{(1)}(x);\cdots;e^{\lambda_sx}P_1^{(s)}(x),\cdots,e^{\lambda_sx}P_{n_s}^{(s)}(x)),\quad (6.42)$$

其中（$i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,n_i$）

$$P_j^{(i)}(x)=\mathbf{r}_{j0}^{(i)}+x\mathbf{r}_{j1}^{(i)}+\frac{x^2}{2!}\mathbf{r}_{j2}^{(i)}+\cdots+\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\mathbf{r}_{jn_i-1}^{(i)},\quad (6.43)$$

$\mathbf{r}_{10}^{(i)},\cdots,\mathbf{r}_{n_i0}^{(i)}$是$(A-\lambda_iE)^{n_i}\mathbf{r}=0$的$n_i$个线性无关解，且$\mathbf{r}_{jk}^{(i)}=(A-\lambda_iE)^k\mathbf{r}_{j0}^{(i)}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,n_i;k=1,2,\cdots,n_i-1)$。

此外，当所得出的$\Phi(x)$是复值时，可从$\Phi(x)$中提取实值基解矩阵。

证明：由引理6.7可知，在（6.42）中矩阵$\Phi(x)$的每一列都是（6.25）的解。因此，我们只需证明$\Phi(x)$的各列线性无关即可。从（6.42）和（6.43）不难看出

$$\Phi(0)=(\mathbf{r}_{10}^{(1)},\cdots,\mathbf{r}_{n_10}^{(1)};\cdots;\mathbf{r}_{10}^{(s)},\cdots,\mathbf{r}_{n_s0}^{(s)}).\quad (6.44)$$

由命题4的（1）可知，我们可以适当选取$\{\mathbf{r}_{j0}^{(i)}\}$，使得相应于同一个$\lambda_i$的$\mathbf{r}_{10}^{(i)},\cdots,\mathbf{r}_{n_i0}^{(i)}$是线性无关的；再由命题4的（2）可见，矩阵$\Phi(0)$中的各列构成了$n$维线性空间$V$的一组基，从而$\det\Phi(0)\neq0$。因此，$\Phi(x)$是方程（6.25）的一个基解矩阵。 □

所以待定指数函数法求解齐次线性微分方程组的基解矩阵（通解）有如下步骤（包括只有单特征值和多重特征值情形）：

（1）确定特征值及其重数：$n_1+\cdots+n_s=n$；

（2）确定$(A-\lambda_i E)^{n_i}\mathbf{r}=0$的$n_i$个线性无关的向量$\mathbf{r}_{10}^{(i)},\cdots,\mathbf{r}_{n_i 0}^{(i)}$；

（3）对每一个$\mathbf{r}_{j0}^{(i)}(j=1,\cdots,n_i)$，求$\mathbf{r}_{jk}^{(i)}:=(A-\lambda_i E)^k\mathbf{r}_{j0}^{(i)},k=1,\cdots,n_i-1$。

（4）得到解

$$e^{\lambda_i x}P_j^{(i)}(x)=e^{\lambda_i x}(\mathbf{r}_{j0}^{(i)}+x\mathbf{r}_{j1}^{(i)}+\frac{x^2}{2!}\mathbf{r}_{j2}^{(i)}+\cdots+\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\mathbf{r}_{jn_i-1}^{(i)}),\quad j=1,2,\cdots,n_i. \tag{6.43}$$

（5）选取实基解矩阵。

求解过程中$\mathbf{r}_{10}^{(i)},\cdots,\mathbf{r}_{n_i 0}^{(i)}$的选取具有自由度。

例：求解

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=A\mathbf{y}=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\mathbf{y}.$$

解：$\lambda_1=-1,n_1=1;\lambda_2=2,n_2=2$。$\lambda_1=-1$有特征值$\mathbf{r}_{10}^{(1)}=(2,-3,0)^T$，对应的解为

$$e^{-x}(2,-3,0)^T.$$

可计算得

$$A-2E=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&-3&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad (A-2E)^2=\begin{pmatrix}0&-6&2\\0&9&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此可选取$(A-2E)^2\mathbf{r}=0$的两个线性无关解

$$\mathbf{r}_{10}^{(2)}=(1,0,0)^T,\quad \mathbf{r}_{20}^{(2)}=(0,1,3)^T,$$

从而

$$\mathbf{r}_{11}^{(2)}=(0,0,0)^T;\quad \mathbf{r}_{21}^{(2)}=(2,0,0)^T,\quad \mathbf{r}_{22}^{(2)}=(0,0,0)^T$$

从而对应的解分别为

$$e^{2x}(1,0,0)^T,$$

和

$$e^{2x}[(0,1,3)^T+(2,0,0)^T x].$$

作业：6-2：1（3），2（3，5），3（3），5

§6.3 高阶线性微分方程式

考虑仅含一个未知函数$y=y(x)$的n阶线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \quad (6.46)$$

其中$a_1(x),\cdots,a_n(x)$和$f(x)$都是区间$a<x<b$上的连续函数。当$f(x)$不恒为零时，称（6.46）为非齐次线性微分方程；与它相应的齐次线性微分方程是

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0. \quad (6.47)$$

如上一章5.2节所指出的，如果引进新的未知函数

$$y_1=y, \quad y_2=y', \quad \cdots, \quad y_n=y^{(n-1)}, \quad (6.48)$$

则方程（6.46）等价于下面的线性微分方程组：

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=A(x)\mathbf{y}+\mathbf{f}(x), \quad (6.49)$$

其中

$$\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},y_n)^T, \quad \mathbf{f}(x)=(0,0,\cdots,0,f(x))^T$$

$$A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{pmatrix}$$

而齐次线性微分方程（6.47）也相应地转换成

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=A(x)\mathbf{y}. \quad (6.50)$$

这样一来，本章前两节的结果都可以应用到方程组（6.50）和（6.49）上来。而且，利用这时$A(x)$和$\mathbf{f}(x)$的特殊形式，我们能够获得某些进一步的结果。然后，在有关的向量公式中，只要取第一个分量，就可得到方程式（6.47）和（6.46）的相应结果。特别，我们可以推出，微分方程（6.46）满足初值条件

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

的解在区间$a<x<b$上存在而且唯一。

§6.3.1 高阶线性微分方程的一般理论

设函数组（对应y_1）

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x) \quad (6.51)$$

是齐次线性微分方程（6.47）的m个解，则由（6.48）可得方程组（6.50）的m个相应解为

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \varphi_2'(x) \\ \vdots \\ \varphi_2^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \varphi_m(x) \\ \varphi_m'(x) \\ \vdots \\ \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

反过来，方程组的m个解它形如（6.52），它的第一个分量给出方程的m个解（6.51）。

命题5：方程（6.47）的解组（6.51）在$a < x < b$上线性无关（相关），当且仅当由它们作出的向量函数组（6.52）在$a < x < b$上线性无关（相关）。

证明：根据线性无关（相关）的定义，如果（6.51）线性无关，则（6.52）线性无关；如果（6.51）线性相关，则（6.52）线性相关。 □

所以齐次线性微分方程（6.47）也正好最多有n个线性无关的解

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x) \quad (6.51)$$

对应于方程组（6.50）的n个相应的线性无关的解为

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \varphi_2'(x) \\ \vdots \\ \varphi_2^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \varphi_n'(x) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

记其Wronsky行列式为$W(x)$。

把齐次线性微分方程组的定理转述到高阶微分方程，可以直接得到如下定理：

定理6.1，6.2. 齐次线性方程（6.47）在区间$a < x < b$上存在n个线性无关的解（称之为基本解组）。（6.47）的一个解组（6.51）线性无关当且仅当它的Wronsky行列式$W(x) \neq 0$。如果这n个线性无关的解如（6.51）所示，则（6.47）的通解为

$$y = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x),$$

其中$C_1, \cdots, C_n$为任意常数。 □

Theorem 6.3.1. 定理*6.3.* 设$\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$是齐次线性微分方程(*6.47*)在区间$a<x<b$上的一个基本解组，则非齐次线性微分方程（*6.46*）的通解为

$$y=C_1\varphi_1(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)+\varphi^*(x), \quad (6.57)$$

其中$C_1,\cdots,C_n$是任意常数，

$$\varphi^*(x)=\sum_{k=1}^n\varphi_k(x)\int_{x_0}^x\frac{W_k(s)}{W(s)}f(s)ds \quad (6.58)$$

是方程(*6.46*)的一个特解。这里$W(x)$为$\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$的*Wronsky*行列式，$W_k(x)$是代数余子式$W_{nk}$（$W(x)$中$(n,k)$元素的代数余子式，即以$(0,0,\cdots,0,1)^T$替换$W(x)$ 中的第k列后得到的行列式）。

证明：取对应的微分方程组通解的第一个分量得到（6.46）通解的形式（6.57），所以只需要验证$\varphi^*(x)$是如下向量值函数的第一个分量

$$\Phi(x)\int_{x_0}^x\Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds.$$

利用逆矩阵和代数余子式的关系可得

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^x\Phi(x)\Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds\\ =&\int_{x_0}^x\frac{\Phi(x)}{W(s)}\begin{pmatrix} * & W_1(s)\\ * & W_2(s)\\ * & \cdots\\ * & W_n(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f(s)\end{pmatrix}ds\\ =&\int_{x_0}^x\frac{f(s)}{W(s)}\Phi(x)\begin{pmatrix}W_1(s)\\ \vdots\\ W_n(s)\end{pmatrix}ds\end{aligned}$$

□

例如，考虑二阶非齐次线性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x).$$

其中$p,q,f\in C(a,b)$。如果对应的齐次方程有两个线性无关的特解$y=\varphi_1(x),\varphi_2(x)$。则其通解为

$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\int_{x_0}^x\frac{-\varphi_1(x)\varphi_2(s)+\varphi_2(x)\varphi_1(s)}{\varphi_1(s)\varphi_2'(s)-\varphi_2(s)\varphi_1'(s)}f(s)ds. \quad (6.60)$$

另外，可以结合对应的方程组并利用常数变易法确定一个特解：设其为

$$y = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x). \quad (6.61)$$

则由非齐次方程组的第一个分量可得

$$y' = [A\Phi(x)\mathbf{C}(x)]^{(1)} + 0 = C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2'$$

因此要求C_1, C_2使得

$$C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 = 0, \quad (6.62)$$

从而

$$y' = C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2'. \quad (6.63)$$

对（6.63）再求导，并利用y, φ_1, φ_2满足相应的方程得

$$C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2' = f(x). \quad (6.64)$$

由（6.62，6.64）解得

$$C_1'(x) = -\frac{\varphi_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{\varphi_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

积分得到$C_1(x), C_2(x)$，代入（6.61），得到通解（6.60）。

但即使对于二阶齐次线性方程，也没有一般的简单求解方法。考虑

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

如果已知一个特解，则可通过它使方程降阶后求通解。

如果$y = \varphi(x)$和$y = y(x)$是齐次方程的两个解，则由Liouville公式以及此时$trA(x) = -a_1(x) = -p(x)$可得

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi(x) & y(x) \\ \varphi'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = W(x_0)e^{\int_{x_0}^x trA(s)ds} = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds}.$$

特别，如果$y = \varphi(x)$已知，则得到$y = y(x)$的一个一阶线性方程。

定理：设$y = \varphi(x) > 0$是$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$的解，其中$p(x), q(x) \in C(a, b)$。则方程的通解为

$$y = \varphi(x)[C_1 + C_2\int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi^2(s)}e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt}ds], \quad (6.56)$$

其中C_1, C_2为任意常数。

证明：设$y=y(x)$是另一个与$y=\varphi(x)$线性无关的解，则

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}(\varphi y'-y\varphi') &= \varphi y''-y\varphi'' \\
&= \varphi(-py'-qy)-y(-p\varphi'-q\varphi) \\
&= -p(\varphi y'-y\varphi'),
\end{aligned}$$

因此得到一阶线性方程

$$\varphi y'-y\varphi'=Ce^{-\int p(x)dx},\quad C\neq 0.$$

乘以积分因子φ^{-2}得

$$\frac{d}{dx}(\frac{y}{\varphi})=\frac{C}{\varphi^2}e^{-\int p(x)dx},$$

积分得

$$\frac{y(x)}{\varphi(x)}=\int_{x_0}^{x}\frac{C_2}{\varphi^2(s)}e^{-\int_{x_0}^{s}p(t)dt}ds+C_1.$$

Lagrange降阶法：设$y=\psi(x)$是（伴随）方程的一个特解，即

$$(\psi'-p\psi)'+q\psi=0.$$

设$y=y(x)$为方程的解。则由分部积分得

$$\begin{aligned}
0 &= \int(y''+py'+qy)\psi dx \\
&= y'\psi+\int[-y'(\psi'-p\psi)+qy\psi]dx+C \\
&= y'\psi-y(\psi'-p\psi)+\int y[(\psi'-p\psi)'+q\psi]dx+C \\
&= y'\psi-y(\psi'-p\psi)+C,
\end{aligned}$$

因此得到$y=y(x)$满足一阶线性方程

$$y'\psi-y(\psi'-p\psi)+C=0.$$

§6.3.2 常系数高阶线性微分方程

现在考虑n阶常系数微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),\quad (6.65)$$

和相应的齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0,\quad (6.66)$$

其中$a_1,\cdots,a_n$是实常数，$f(x)\in C(a,b)$。

我们通过求解与它们相应的等价的n阶常系数线性方程组，然后取第一个分量得到（6.65，6.66）的解。引入

$$y_1=y,\quad y_2=y',\cdots,y_n=y^{(n-1)},$$

则（6.66）等价于常系数齐次线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=A\mathbf{y},\quad (6.67)$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

A的特征行列式为

$$\det(\lambda E-A)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n,$$

因此A的特征方程为

$$\det(\lambda E-A)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0,\quad (6.70)$$

即把（6.66）中的$y^{(k)}$换成$\lambda^k,k=0,1,\cdots,n$所得出的代数方程。所以，（6.70）也叫作微分方程（6.66）的特征方程。

Theorem 6.3.2. *定理6.6. 设（6.66）的特征方程（6.70）有s个互不相同的复特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，而且相应的重数分别为$n_1,\cdots,n_s(n_1+\cdots+n_s=n)$。则函数组*

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \cdots & & x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x};\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ e^{\lambda_s x}, & xe^{\lambda_s x}, & \cdots & & x^{n_s-1}e^{\lambda_s x}; \end{cases}\quad (6.71)$$

是微分方程（6.66）的一个基本解组。

证明：只需找出方程组（6.67）的一个基解矩阵，使得它的第一行为（6.71）。

设A有互不相同的特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，其（代数）重数分别为$n_1, \cdots, n_s$。首先我们可以观察到对应每个特征值$\lambda_k$的若当块只有一个。事实上，对应$\lambda_k$的若当块的个数等于$\lambda_k$的几何重数，即对应$\lambda_k$的特征向量空间的维数，即$\lambda_k E - A$的解空间维数。由于$\mathrm{rank}(\lambda_k E - A) = n-1$，因此$\lambda_k$的几何重数为1，对应$\lambda_k$的若当块只有一个，它是$n_k$阶的。

因此存在过渡举着P使得

$$AP = PJ = Pdiag(J_1, \cdots, J_s) \quad (6.72)$$

并且$P = (p_{ij})$满足

$$p_{1m_j} \neq 0, \quad j = 1, \cdots, s, \quad m_1 = 1, m_2 = n_1 + 1, \cdots, m_s = n_1 + \cdots + n_{s-1} + 1.$$

事实上，若某个$p_{1m_j} = 0$，则看$AP = PJ$的第m_j列：

$$\begin{aligned} (AP)_{km_j} &= (p_{2m_j}, p_{3m_j}, \cdots, p_{nm_j}, -a_n p_{1m_j} - \cdots - a_1 p_{nm_j})^T \\ &= (PJ)_{km_j} = \lambda_j (p_{1m_j}, p_{2m_j}, \cdots, p_{n-1m_j}, p_{nm_j})^T, \end{aligned}$$

因此

$$p_{1m_j} = 0 \Rightarrow p_{2m_j} = 0 \Rightarrow p_{3m_j} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_{n-1m_j} = 0 \Rightarrow p_{nm_j} = 0.$$

这与过渡矩阵P非奇异相矛盾。

因此方程组（6.67）的基解矩阵$e^{xA}P$的第一行元素依次为

$$p_{11}e^{\lambda_1 x}, p_{11}xe^{\lambda_1 x} + p_{12}e^{\lambda_1 x}, \cdots, p_{11}\frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{\lambda_1 x} + \cdots;$$

$$\cdots$$

$$p_{1m_s}e^{\lambda_s x}, p_{1m_s}xe^{\lambda_1 x} + p_{1m_s+1}e^{\lambda_s x}, \cdots, p_{1m_s}\frac{x^{n_s-1}}{(n_s-1)!}e^{\lambda_1 x} + \cdots;$$

利用齐次线性微分方程解的叠加原理，即对基解矩阵$e^{xA}P$进行适当的列变换消去第一行中各元素除x的最高阶以外的项，从而得到另一个基解矩阵，它的第一行正是（6.71）。

如果$\mathrm{Im}\lambda_i \neq 0$，则其共轭$\overline{\lambda}_i$也是特征值。对应的实解为$x^k e^{\mathrm{Re}\lambda_i}\cos(\mathrm{Im}\lambda_i), x^k e^{\mathrm{Re}\lambda_i}\sin(\mathrm{Im}\lambda_i)$。□

求非齐次线性方程的特解除了标准的公式之外，还可以根据某些非齐次项$f(x)$的特殊形式采用待定系数法来找特解。

【例4】求解微分方程

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y^{(3)} - 4y'' + 3y' - y = 0.$$

解：特征方程为

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1) = 0,$$

因此$\lambda = 1$为三重特征值，$\lambda = \pm i$为共轭的单特征值。一个基本解组为

$$e^x, \quad xe^x, \quad x^2e^x, \quad e^{ix}, \quad e^{-ix},$$

所以通解为

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + C_4\cos x + C_5\sin x.$$

【例，习题8】求解有阻尼的弹簧振动方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad m, r, k > 0.$$

解：特征方程为

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0.$$

当判别式$\Delta = r^2 - 4mk > 0$时，

$$\lambda = \frac{-r \pm \sqrt{\Delta}}{2m},$$

有两个不同的实特征值$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$，通解为

$$x = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}.$$

当判别式$\Delta = r^2 - 4mk = 0$时，有二重特征值$\lambda = -\frac{r}{2m}$，通解为

$$x = (C_1 + C_2t)e^{\lambda t}.$$

当判别式$\Delta = r^2 - 4mk < 0$时，有一对共轭的特征值

$$\lambda = \frac{-r \pm i\sqrt{-\Delta}}{2m},$$

通解为

$$x = e^{-\frac{r}{2m}t}(C_1\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t) + C_2\sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t)).$$

作业：4，5，7，9，10（9，10，11，12，13，14）

第七章　定性理论与分支理论初步

由法国数学家庞加莱在19世纪80年代所开创的微分方程定性理论，不借助于对微分方程的求解，而是从微分方程本身的一些特点来推断其解的性质（例如周期性、稳定性等），因而它是研究非线性微分方程的一个有效手段，自20世纪以来已成为常微分方程发展的主流。与庞加莱同时，俄国数学家李雅普诺夫（Lyapunov，1857-1918）对微分方程解的稳定性所作的深入研究，是定性理论的又一个重要工作。

近年来，人们不仅关心微分方程的某一个解在初值或参数扰动下的稳定性（即李雅普诺夫稳定性），以及这种稳定性遭到破坏时所可能出现的浑沌（chaos）现象，而且关心在一定范围内解族的拓扑结构在微分方程的扰动下的稳定性（即结构稳定性），以及这种稳定性遭到破坏时所出现的分支（bifurcation）现象。

鉴于微分方程定性理论的应用已深入到许多自然学科和社会学科的领域，我们似有必要在本书中对它的一些基本概念和基本方法作一个初步的介绍。

§7.1　动力系统，相空间与轨线

假定一个运动质点M在时刻t的坐标（不局限于空间位置）为$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，并且已知它在$\mathbf{x}$处的导数为$\mathbf{v}(\mathbf{x})=(v_1(\mathbf{x}),\cdots,v_n(\mathbf{x}))$，它只与坐标$\mathbf{x}$有关。则我们得到质点$M$的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{v}(\mathbf{x}),\quad (8.1)$$

它是一个自治微分方程（不显含时间t）。（8.1）可以看作更一般的一个自治微分方程组，例如二体（多体）问题可转化为这个形式。如果$\mathbf{v}(\mathbf{x})$满足微分方程解的存在和唯一性定理的条件，则对任何初值条件

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0,\quad (8.2)$$

方程（8.1）存在唯一的满足初值条件（8.2）的解

$$\mathbf{x}(t)=\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0),\quad (8.3)$$

它描述了满足初值条件$(t_0,\mathbf{x}_0)$的质点M的运动。

我们称$\mathbf{x}$取值的空间$\mathbb{R}^n$为相空间，称$(t,\mathbf{x})$取值的空间$\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$为增广相空间。按照微分方程的几何解释，解（8.3）在增广相空间中的图像是一条通过$(t_0,\mathbf{x}_0)$的光滑曲线（积分曲线）。

现在我们从运动的观点给出另一种几何解释：方程（8.1）在相空间中的每一点$\mathbf{x}$，给定了一个向量

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), \cdots, v_n(\mathbf{x})), \quad (8.4)$$

因而它在相空间中定义了一个向量场；而解的表达式（8.3）在相空间中给出了一条与向量场（8.4）相吻合的光滑曲线（称它为轨线），其中t为参数（不显含），且参数t_0对应于轨线上的点$\mathbf{x}_0$。随着时间t的演变，质点的坐标$\mathbf{x}(t)$在相空间中沿着轨线变动，通常用箭头在轨线上标明相应于时间t增大时质点的运动方向。

须要注意，积分曲线是增广相空间中的曲线，而轨线则是相空间中的曲线。容易看出，积分曲线沿t轴向相空间的投影就是相应的轨线（$(t, \mathbf{x}(t)) \mapsto (\mathbf{x}(t))$），而且轨线有明显的力学意义：它是质点$M$在相空间中的轨迹。

由于在一般情形下得不出解（8.3）的明显表达式，所以我们面对的任务是：从向量场（8.4）的特性出发，去获取轨线的几何特征，或者更进一步，去弄清轨线的拓扑结构图（称为相图）。因此，微分方程的定性理论又称为几何理论。

如果$\mathbf{x}_0$是向量场（8.4）的零点，即$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) = 0$，则显然方程（8.1）有一个定常解$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$。换句话说，点$\mathbf{x}_0$就是一条（退化的）轨线。这时我们称点$\mathbf{x}_0$为方程（8.1）的一个平衡点，它表示了运动的一个平衡态。今后我们会看到，在平衡点附近的轨线可能出现各种奇怪的分布，而且当$t \to \infty$（或$-\infty$）时，其他轨线有可能趋向（或远离）平衡点。通常，把方程（8.1）的平衡点叫作奇点。

如果解（8.3）是一个非定常的周期运动，即存在$T > 0$，使得

$$\varphi(t+T; t_0, \mathbf{x}_0) \equiv \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0),$$

则它在相空间中的轨线是一条闭曲线，即闭轨。

在定性理论中，对奇点和闭轨的分析是一个基本的问题。

【例1】设质点$M(x,y)$在Oxy平面上运动，满足方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(x^2+y^2-1), \\ \frac{dy}{dt} = x + y(x^2+y^2-1). \end{cases} \quad (8.5)$$

应用极坐标$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则

$$\frac{dr}{dt} = r(r^2-1), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$

由此积分得

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - C_1 e^{2t}}}, \quad \theta = t + C_2.$$

设初值为

$$r(0) = r_0, \quad \theta(0) = \theta_0.$$

则

$$C_1 = \frac{r_0^2 - 1}{r_0^2}.$$

例如，(x_0, y_0)位于单位圆周之外时，$C_1 > 0$。根据初值(x_0, y_0)的不同，系统（8.5）的轨线有如下四种不同的类型：

（1）$(x_0, y_0) = (0, 0)$，轨线就是奇点$(0, 0)$。此时，$(0, 0)$是系统（8.5）的唯一平衡点。

（2）(x_0, y_0)在单位圆周Γ上，相应的轨线就是闭轨Γ，它以逆时针方向为正向。

（3）$0 < r_0 < 1$，则$C_1 < 0$，相应的轨线是单位圆周内的非闭曲线。当$t \to +\infty$时，它逆时针盘旋趋于平衡点$(0, 0)$；当$t \to -\infty$时，它顺时针盘旋趋于闭轨Γ。

（4）$r_0 > 1$时，则$C_1 > 0$，相应的轨线为单位圆周外部的非闭曲线。$t \to -\infty$时，它顺时针盘旋趋于Γ。

现在，我们要着重指出：任何一个自治微分方程都具有（8.1）的形式，而且只要右端函数满足解的存在和唯一性条件，就可以对它作出如上的动力学解释（不管它的自变量t是否代表时间），并可沿袭相空间、轨线、平衡点（奇点）和闭轨等概念。在这个意义下，我们也把微分方程（8.1）（假设右端函数满足解的存在和唯一性条件：$\mathbf{v}(\mathbf{x})$ 连续，并满足局部Lipschitz条件）称为一个动力系统。

下面是动力系统的几个基本性质：

1. 积分曲线的时间平移不变性：即系统（8.1）的积分曲线在增广相空间中沿t轴任意平移后还是（8.1）的积分曲线。事实上，设$\mathbf{x} = \varphi(t)$是系统（8.1）的一个解，则由方程的自治性可直接验证：对任意常数C，$\mathbf{x} = \varphi(t + C)$也是（8.1）的解。

2. 过相空间每一点轨线的唯一性：即过相空间中的任一点，系统（8.1）存在唯一的轨线通过此点。轨线的存在性通过积分曲线的投影得到。下面证明轨线的唯一性。假设在相空间的$\mathbf{x}_0$ 附近有两条不同的轨线段l_1, l_2都通过$\mathbf{x}_0$，不妨设它们在$\mathbf{x}_0$分岔。则在增广相空间中至少有两条不同的积分曲线段Γ_1, Γ_2（它们可能属于同一条积分曲线），分别记作$\varphi_1(t; t_1, \mathbf{x}_0), \varphi_2(t; t_2, \mathbf{x}_0)$，使得它们在相空间中的投影分别是$l_1, l_2$。将$\Gamma_1$沿时间轴平移，使得平移后$\widetilde{\Gamma}_1$与$\Gamma_2$在$(t_2, \mathbf{x}_0)$ 相交。由解的唯一性，$\widetilde{\Gamma}_1$与Γ_2应完全重合，从而它们在相空间有相同的投影，又Γ_1与$\widetilde{\Gamma}_1$在相空间也有相同的投影，因此Γ_1, Γ_2在相空间$\mathbf{x}_0$ 附近有相同的投影，与l_1, l_2为通过$\mathbf{x}_0$的不同轨线矛盾。

由于（8.1）的解具有时间平移不变性，通过时间平移可以由$\varphi(t;t_0,\mathbf{x}_0)$得到一条积分曲线，仍记作$\varphi(t)$，使得$\varphi(0)=\mathbf{x}_0$，即$\varphi(t;0,\mathbf{x}_0)$。以下记

$$\varphi(t;\mathbf{x}_0)=\varphi(t;0,\mathbf{x}_0).$$

3. 群的性质：系统（8.1）的解$\varphi(t;\mathbf{x}_0)$满足关系式

$$\varphi(t_2;\varphi(t_1;\mathbf{x}_0))=\varphi(t_2+t_1;\mathbf{x}_0). \quad (8.6)$$

左边表示在相空间中，从$\mathbf{x}_0$出发沿轨线经过时间t_1到达$\mathbf{x}_1=\varphi(t_1;\mathbf{x}_0)$，再沿轨线经过时间$t_2$到达$\mathbf{x}_2=\varphi(t_2;\varphi(t_1;\mathbf{x}_0))$。右边表示从$\mathbf{x}_0$出发沿轨线经过时间$t_1+t_2$到达的点$\varphi(t_2+t_1;\mathbf{x}_0)$。我们需要说明它们是同一个点。事实上，$\varphi(t;\varphi(t_1;\mathbf{x}_0))$与$\varphi(t+t_1;\mathbf{x}_0)$ 都是（8.1）的解，而且$t=0$时刻的取值都是$\varphi(t_1;\mathbf{x}_0)$。因此由解的唯一性，$\varphi(t;\varphi(t_1;\mathbf{x}_0))\equiv\varphi(t+t_1;\mathbf{x}_0)$，取$t=t_2$得（8.6）。

【附注1】（8.1）可以通过选取不同的参数，例如$s(t):=\int_{t_0}^{t}\sqrt{1+|\mathbf{v}(\mathbf{x}(\tau))|^2}d\tau$，从而

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}=\frac{d\mathbf{x}}{dt}/\frac{ds}{dt}=\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\sqrt{1+|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2}},$$

该系统与（8.1）具有相同的轨线，并且$s\in(-\infty,+\infty)$。设对任意$\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$，系统（8.1）的解$\varphi(t;\mathbf{x}_0)$都在$t\in(-\infty,+\infty)$上存在。则对任意固定$t$，解$\varphi(t;\mathbf{x}_0)$给出了一个从$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$的变换$\varphi_t:\mathbf{x}_0\mapsto\varphi_t(\mathbf{x}_0):=\varphi(t;\mathbf{x}_0)$。因此$\Sigma:=\{\varphi_t|t\in\mathbb{R}\}$是一个单参数的变换集合，它具有性质：

（1）φ_0是$\mathbb{R}^n$上的恒同变换；

（2）$\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$，即

$$\varphi_s(\varphi_t(x_0))=\varphi_{s+t}(x_0), \quad \forall x_0\in\mathbb{R}^n, \quad s,t\in\mathbb{R}.$$

（3）$\varphi_t(\mathbf{x}_0)$对$(t,\mathbf{x}_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$是连续的。

可见$\Sigma=\{\varphi_t|t\in\mathbb{R}\}$构成一个单参数（加法）群。具有性质（1，2，3）的单参数连续变换群称为一个抽象动力系统（拓扑动力系统）；如果再要求φ_t是可微的，则称它为微分动力系统。

【附注2】对于非自治系统$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$，可以把它视为高一维空间上的自治系统：令$\mathbf{y}=(\mathbf{x},s)^T$，$\mathbf{w}(\mathbf{y})=(\mathbf{v}(s,\mathbf{x}),1)^T$，则它等价于$n+1$维相空间中的自治系统

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{w}(\mathbf{y}).$$

【附注3】Euler-Lagrange Equation and Hamilton system

Let us consider a smooth function $L : R^k \times R^k \times R \to R$, a pair of points $p_1, p_2 \in R^k$, two real numbers $t_1 < t_2$, and the set $C := C(p_1, p_2, t_1, t_2)$ of all smooth curves $q : [t_1, t_2] \to R^k$ such that $q(t_1) = p_1$ and $q(t_2) = p_2$. Using this data, there is a function $\Phi : C \to R$ given by

$$\Phi(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt. \quad (3.1)$$

The Euler-Lagrange equation, an ordinary differential equation associated with the function L - called the Lagrangian - arises from the following problem: Find the extreme points of the function Φ. This variational problem is the basis for Lagrangian mechanics.

Consider a “variation of curves” in C, that is, as a smooth function $Q : [-\epsilon, \epsilon] \times [t_1, t_2] \to R^k$ with the “end conditions”

$$Q(s, t_1) = p_1, \quad Q(s, t_2) = p_2.$$

In this interpretation, $\gamma_s(t) = Q(s, t)$.

Fix a point $q \in C$ and suppose that $\gamma_0 = q$, or equivalently that $Q(0, t) = q(t)$. Then, as s varies we obtain a family of curves called a variation of the curve q. The tangent vector to γ_s at q is, by definition, the curve $V : [t_1, t_2] \to R^k \times R^k$ given by $t \mapsto (q(t), v(t))$ where

$$v(t) := \frac{\partial}{\partial s} Q(s, t)|_{s=0}.$$

v satisfies

$$v(t_1) = \frac{\partial}{\partial s} Q(s, t_1)|_{s=0} = 0, \quad v(t_2) = \frac{\partial}{\partial s} Q(s, t_2)|_{s=0} = 0.$$

Let us view the vector V as an element in the “tangent space of C at q.”

Following the prescription given above, we have

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(Q(s,\cdot))|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial s} L(Q(s,t), \frac{\partial}{\partial t}Q(s,t), t)|_{s=0} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial^2 Q}{\partial s \partial t})|_{s=0} dt. \quad (3.2)\end{aligned}$$

After evaluation at $s = 0$ and an integration by parts, we can rewrite the last integral to obtain

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(Q(s,\cdot))|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} [\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t))]\frac{\partial Q}{\partial s} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t))]v(t) dt. \quad (3.3)\end{aligned}$$

The curve q is called an extremal if $\frac{\partial}{\partial s}\Phi(Q(s,\cdot))|_{s=0}=0$ for all tangent vectors V. Since for a given v we can construct $Q(s,t):=q(t)+sv(t)$ so that $\partial Q/\partial s=v$, the curve q is an extremal if the last integral in equation (3.3) vanishes for all smooth functions v that vanish at the points t_1 and t_2.

Proposition 7.1.1. *The curve q is an extremal if and only if it is a solution of the Euler - Lagrange equation*

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})-\frac{\partial L}{\partial q}=0.$$

When we search for the extreme points of a function, we are usually interested in its maxima or minima. The same is true for the function Φ defined above. In fact, the theory for determining the maxima and minima of Φ is similar to the usual finite-dimensional theory, but it is complicated by the technical problems of working in infinite-dimensional function spaces. The general theory is explained in books on the calculus of variations.

In mechanics, the Lagrangian L is taken to be the difference between the kinetic energy and the potential energy of a particle, the corresponding function Φ is called the action, and a curve $q: R \to R^k$ is called a motion. **Hamilton's principle states: Every motion of a physical particle is an extremal of its action.** Of course, the motions of a particle as predicted by Newton's second law are the same as the motions predicted by Hamilton's principle.

Example: (1)

$$\Phi(q)=\int_{t_1}^{t_2}(\frac{1}{2}m\dot{q}_k^2-U(q))dt,$$

then Euler-Lagrange equation

$$m\ddot{q}_k=-U_{q_k}=F_k.$$

(2)

$$\Phi(q)=\int_{t_1}^{t_2}[\frac{1}{2}m\ddot{q}_k^2+\frac{GMm}{|q|}]dt,$$

then the Euler-Lagrange equation

$$m\ddot{q}_k=-\frac{GMm}{|q|^3}q_k.$$

We will discuss some of the properties enjoyed by the Euler-Lagrange dynamical system. For simplicity we will consider only the case of autonomous Lagrangians, $L: R^k\times R^k\to R$.

We will assume the Lagrangian is regular; i.e. L satisfies the Legendre condition

$$\det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}) \neq 0.$$

Introduce a new variable p defined by the equation

$$p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = 0.$$

By the implicit function theorem, the Legendre condition is precisely what is needed to solve this equation for $\dot{q}$, i.e. to write $\dot{q} = v(q, p)$. That is, $\dot{q}$ is defined implicitly as a function $v : R^k \times R^k \to R^k$ so that $\dot{q} = v(q, p)$. In this case, the Hamiltonian $H : R^k \times R^k \to R$ is defined by

$$H(q, p) := p\dot{q} - L(q, \dot{q}) = pv(q, p) - L(q, v(q, p)).$$

This function is often written in the simple form

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L.$$

The transformation from the Lagrangian to the Hamiltonian is called the Legendre transformation. If $L = T - U$ with $T = T(\dot{q})$ homogeneous of degree 2 in $\dot{q}$, and $U = U(q)$ (as will be the case in a typical mechanical system), then

$$H(q, p) = pv - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - T + U = T + U$$

is the total energy.

The Euler-Lagrange equations for L can be transformed into the Hamiltonian equations for H:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q};$$

these have to be read as $\dot{q}_j = \partial H / \partial p_j, j = 1, \cdots, n$; likewise for the second system of n equations. Notice that we have reduced a system of n second-order equations to a system of 2n first-order equations.

Proposition 7.1.2. *If the Lagrangian is regular, then the Hamiltonian is a first integral of the corresponding Lagrangian dynamical system. Moreover, the Lagrangian equations of motion are equivalent to the Hamiltonian system*

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q).$$

Proof. Using the definition of p and $\dot{q}=\alpha(q,p)$, and the Euler-Lagrange equation, we have that

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(q,p) &= \dot{p}v(q,p)+p\frac{d}{dt}v(q,p)-\frac{\partial L}{\partial q}(q,v(q,p))v(q,p)-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}v(q,p)\\
&= [\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})(q,v(q,p))-\frac{\partial L}{\partial q}(q,v(q,p))]\alpha(q,p)\\
&= 0;
\end{aligned}
$$

that is, H is constant along solutions of the Euler-Lagrange equation.

By the definition of $H(q,p)$ and $p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

$$\frac{\partial H}{\partial p}=v+p\frac{\partial v}{\partial p}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial v}{\partial p}=v=\dot{q},$$

and by $p=\frac{\partial L}{\partial v}$ and the Euler-Lagrange equation

$$\frac{\partial H}{\partial q}=p\frac{\partial v}{\partial q}-\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial v}{\partial q}=-\frac{\partial L}{\partial q}=-\dot{p}.$$

□

A first-order system equivalent to the Euler-Lagrange equation has dimension $2k$. Here, k is called the number of degrees of freedom. The space R^k with coordinate q is called the configuration space; its dimension is the same as the number of degrees of freedom. The space $R^k\times R^k$ with coordinates $(q,\dot{q})$ is called the state space; it corresponds to the tangent bundle of the configuration space. The space $R^k\times R^k$ with coordinates (q, p) is called the phase space; it corresponds to the cotangent bundle of the configuration space.

Example. $L=\frac{1}{2}m\dot{q}_k^2-U(q)$, then $p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q}$, $\dot{q}=\frac{p}{m}$, $H=p\frac{p}{m}-L=\frac{p^2}{2m}+U(q)$. Then the equation/Hamilton system:

$$\dot{q}=\frac{p}{m},\quad \dot{p}=-\frac{\partial U}{\partial q}.$$

§7.2 解的稳定性

§7.2.1 Lyapunov稳定性的概念

在5.3节中，我们讨论了微分方程的解对初值的连续依赖性（例如上节例1中$r_0 = 1, r_0 < 1$）。那里的讨论方法只适用于自变量在有限闭区间内取值的情况。如果自变量扩展到无穷区间上，那么解对初值不一定有连续依赖性。Poincare最早提出了这个问题，Lyapunov研究了自变量扩展到无穷区间上的情形解对初值的连续依赖性问题。而这种连续性的破坏可以导致解对初值的敏感依赖，甚至混沌现象的出现。这里我们仅就Lyapunov稳定性做一个简要的介绍。

首先考察上一节例1及其解

$$\frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - C_1 e^{2t}}}, \quad \theta = t + C_2.$$

平衡点$(0,0)$有一个重要特征，从它附近（单位圆周内部）的任一点出发的轨线当$t \to +\infty$时都趋于$(0,0)$点。换句话说，初值点的偏差不影响解的最终趋势。因此，我们称该系统的平衡点$(0,0)$（或相应的解$x = 0, y = 0$）渐近稳定的。

其次，我们再考察5.1中无阻尼单摆的振动问题，其振动方程为（其中x为偏离平衡位置的角度）

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2 \sin x = 0,$$

或写成等价形式

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -a^2 \sin x. \quad (8.8)$$

这是一个二维的动力系统。容易看出，$(k\pi, 0)$为平衡点。分析平衡点$(0,0)$及$(\pi, 0)$：从$(x = 0, x'(t) = 0)$点附近出发的轨线都可以停留在$(0,0)$点的任意小邻域内，只要相应的初值点足够靠近$(0,0)$，这时轨线是闭轨。而$(\pi, 0)$附近的轨线（除两条外：轨线到达$x = \pi$时$x'(t) = 0$）都要跑出$(\pi, 0)$的某个邻域，无论相应的初值多么靠近$(\pi, 0)$。这也可以分析相图得到。针对上述不同的特征，我们把平衡点$(0,0)$（或定常解$x = 0, y = 0$）称作是稳定的（但不是渐近稳定的），把平衡点$(\pi, 0)$称作是不稳定的。

现在，我们考虑一般的方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (8.9)$$

其中函数$\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$对$\mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^n$和$t \in (-\infty, \infty)$连续，并对$\mathbf{x}$满足Lipschitz条件。

Definition 7.2.1. 设（*8.9*）有一个解$\mathbf{x}=\varphi(t)$对$t_0\le t<\infty$有定义。

如果对任意给定$\epsilon>0$，都存在$\delta=\delta(\epsilon)>0$，使得只要

$$|\mathbf{x}_0-\varphi(t_0)|<\delta, \quad (8.10)$$

则方程（*8.9*）以$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$为初值的解$\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0)$也对$t\ge t_0$有定义，并且满足

$$|\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0)-\varphi(t)|<\epsilon, \quad \forall t\ge t_0, \quad (8.11)$$

则称方程（*8.9*）的解$\mathbf{x}=\varphi(t)$是（在*Lyapunov*意义下）稳定的（例如上节例*1*以及单摆振动中的定常解$x=0,y=0$）。

假设$\mathbf{x}=\varphi(t)$是稳定的，而且存在$\delta_1\in(0,\delta]$使得只要

$$|\mathbf{x}_0-\varphi(t_0)|<\delta_1, \quad (8.12)$$

就有

$$\lim_{t\to+\infty}[\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0)-\varphi(t)]=0, \quad (8.13)$$

则称解$\mathbf{x}=\varphi(t)$是（在*Lyapunov*意义下）渐近稳定的（例如上节例*1*中的定常解$x=0,y=0$）。

如果解$\mathbf{x}=\varphi(t)$不是稳定的，则称它是不稳定的。例如上节例*1*中$r_0=1$，单摆中$(\pi,0)$。

如果把条件（8.12）改为：当$\mathbf{x}_0$在区域D（设$\varphi(t_0)\in D$）内时，就有（8.13）成立，则称D为解$\mathbf{x}=\varphi(t)$的渐近稳定域（或吸引域）。如果吸引域是全空间，则称$\mathbf{x}=\varphi(t)$是全局渐近稳定的。例如上节例1中的定常解$x=0,y=0$的吸引域是单位圆周内整个开区域。

【附注1】如果把上面定义中的$t\to\infty$改为$t\to-\infty$（相应的要假设解在$t\le t_0$时的存在性），则可定义负向渐近稳定，负向稳定和负向不稳定的相应定义。一般情况下，我们考虑正向的稳定性，而且省略“正向”两字。

为了简化讨论，我们只考虑（8.9）的零解$\mathbf{x}=0$的稳定性，即假设$f(t,\mathbf{0})=\mathbf{0}$。事实上，在变换$\mathbf{y}=\mathbf{x}-\varphi(t)$之下，总可以把上述一般问题化为这种特殊的情形。此时$\mathbf{y}$满足动力系统

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{f}(t,\mathbf{y}+\varphi(t))-\varphi'(t).$$

本节的主要问题是对于给定的方程（8.9），设法（不通过求通解）判断某个已知特解的稳定性。我们将介绍两种方法：线性近似方法，和Lyapunov第二方法。

§7.2.2 按线性近似判断稳定性

我们把方程（8.9）右端的函数$\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$（注意，$\mathbf{f}(t,\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$）展开成$\mathbf{x}$的线性部分$A(t)\mathbf{x}$和非线性部分$N(t,\mathbf{x})$（$x$的高次项）之和，即考虑方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + N(t,\mathbf{x}), \quad (8.14)$$

其中$A(t) = (a_{ij}(t)) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,\mathbf{0}))$是一个$n$阶的矩阵函数，对$t \geq t_0$连续；而函数$N(t,\mathbf{x})$在$t, \mathbf{x}$ 所在区域

$$G: t \geq t_0, \quad |\mathbf{x}| \leq M \quad (8.15)$$

上连续，对$\mathbf{x}$满足Lipschitz条件，并且还满足$N(t,0) \equiv 0 (t \geq t_0)$，以及

$$\lim_{|x| \to 0} \frac{|N(t,\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (8.16)$$

由于我们考虑的是（8.14）的零解$\mathbf{x} = \mathbf{0}$的稳定性，因而只考察当$|\mathbf{x}_0|$较小时以$(t_0, \mathbf{x}_0)$为初值的解。在一定的条件下，方程（8.14）的零解的稳定性与其线性化方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} \quad (8.17)$$

的零解的稳定性有密切的联系。

当$A(t)$是常矩阵时，利用6.2节中有关常系数齐次方程组基解矩阵的结果，容易得到线性化系统的下述结论。此时解具有形式

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_i t}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 t + \cdots)$$

Theorem 7.2.2. *定理8.1. 设线性方程（8.17）中的矩阵$A(t)$为常矩阵，则*

（1）零解是渐近稳定的，当且仅当矩阵A的全部特征值都有负的实部：

（2）零解是稳定的，当且仅当矩阵A的全部特征值的实部是非正的，并且那些实部为零的特征根所对应的若当块都是一阶的。

（3）零解是不稳定的，当且仅当矩阵A的特征根至少有一个实部为正（a），或者至少有一个实部为零并且它所对应的若当块高于一阶（b）。

一般而言，非线性微分方程（8.14）的零解可能与其线性化方程（8.17）的零解有不同的稳定性。但Lyapunov指出，当$A(t) = A$为常矩阵且A的特征值都具有负实部（1）或至少有一个具有正实部时（3a），方程（8.14）的零解的稳定性则由它的线性化方程（8.17）所决定。

Theorem 7.2.3. 定理*8.2-8.3.* 设方程（*8.14*）中$A(t) = A$为常矩阵。

（*1*）如果A的全部特征值都具有负的实部，则（*8.14*）的零解是渐近稳定的。

（*2*）如果A的全部特征值至少有一个具有正的实部，则（*8.14*）的零解是不稳定的。

当（8.14）中的$N(t, \mathbf{x})$不显含t时，定理可从定理8.1和下节的定理8.7直接得到。对一般情形的证明，则需要利用推广的Gronwall不等式。

【例】

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1). \qquad (8.5) \end{cases}$$

在平衡点$(0, 0)$，其线性化方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

此时$A(t)$为常矩阵，并且特征值为$-1 \pm i$，因此平衡点$(0, 0)$渐近稳定。

【例】单摆振动

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -a^2 \sin x. \quad (8.8)$$

平衡点$(0, 0)$的线性化方程为

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -a^2 x. \quad (8.8)$$

此时$A(t)$为常矩阵，并且特征值为$\pm ai$。$(0, 0)$是稳定平衡点，不能由线性近似方法来判定（线性近似方法适用于渐近稳定和不稳定情形）。

平衡点$(x = \pi, y = 0)$需要作变换$\widetilde{x} = x - \pi, \widetilde{y} = y$，此时动力系统为

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = \widetilde{y}, \quad \frac{d\widetilde{y}}{dt} = a^2 \sin \widetilde{x}$$

平衡点$(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = (0, 0)$处的线性化方程为

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = \widetilde{y}, \quad \frac{d\widetilde{y}}{dt} = a^2 \widetilde{x},$$

其对应矩阵$A(t)$为常矩阵，其特征值为$\pm a$，因此平衡点不稳定。

§7.2.3 Lyapunov第二方法

Lyapunov在他的“运动稳定性的一般问题”中创立了处理稳定性问题的两种方法：第一方法要利用微分方程的级数解。第二方法则巧妙的利用一个与微分方程相联系的所谓Lyapunov函数来直接判定解的稳定性，因此又称为直接方法。

【例】

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(x^2+y^2-1), \\ \frac{dy}{dt} = x + y(x^2+y^2-1). \end{cases} \qquad (8.5)$$

利用Lyapunov函数的方法来直接推断平衡点$(0,0)$渐近稳定。

先考虑一般形式

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y).$$

设$x = x(t), y = y(t)$是该方程的解，记其轨线为Γ。考虑相空间上一个连续可微函数$V = V(x,y)$，则V沿轨线Γ的方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) = V_x\frac{dx}{dt} + V_y\frac{dy}{dt} \\ &= V_x f(x,y) + V_y g(x,y). \end{aligned}$$

注意，这方向导数的计算只依赖于函数V以及相关的向量场$(f(x,y), g(x,y))$在(x,y)点的值，而无需求解方程（即求解轨线Γ的表达式）。我们称它为函数V关于微分方程（8.18）对t的全导数，记作

$$\frac{dV}{dt}|_{(8.5)} = V_x f(x,y) + V_y g(x,y).$$

对于动力系统（8.5）特别选取函数$V = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$，它满足下述两个条件：

条件1：当$(x,y) \neq (0,0)$时，$V(x,y) > 0$；而且$V(0,0) = 0$。

条件2：当$0 < x^2+y^2 < 1$时，全导数

$$\frac{dV}{dt}|_{(8.5)} = r\frac{dr}{dt} = r^2(r^2-1) < 0, \quad r^2 = x^2+y^2.$$

根据条件1和条件2，我们可以断言方程（8.18）的平衡点$(0,0)$是渐近稳定的。事实上，条件1蕴含了函数$V(x,y)$的一个几何特性：对任意足够小常数$C > 0$，$V(x,y) = C$在相平面上的图形是一条环绕原点的闭曲线（等高线）$\gamma(C) = \{r^2 = 2C\}$，并且当$C_1 \neq C_2$时$\gamma(C_1)$与$\gamma(C_2)$不相交；而当$C \to 0$时，$\gamma(C)$收缩到$(0,0)$点。

条件2则在$(0,0)$点附近表示轨线Γ与等高线$\gamma(C)$之间的关系：沿着轨线Γ的正向（t增大的方向），函数$V = V(x(t),y(t))$严格递减，而且我们将论证

$$V(x(t),y(t)) \to 0, \quad t \to +\infty.$$

换句话说，随着$t \to +\infty$，轨线Γ将由外向内穿入所有遇到的$\Gamma(C), C > 0$，最终趋于$(0,0)$点，这说明平衡点$(0,0)$是渐近稳定的。

事实上，假设不然，则有

$$V(x(t), y(t)) \to C_0 > 0, \quad t \to +\infty$$

其中$0 < C_0 < \frac{1}{2}$。因此我们有

$$\frac{dV}{dt}|_{(8.5)} = r^2(r^2-1) \to 2C_0(2C_0-1) < 0, \quad t \to +\infty.$$

但后者蕴含$V(x(t), y(t)) \to -\infty$，矛盾。

现在我们把例子的想法提炼成一个一般的判别法则，即Lyapunov第二方法。为简单起见，只考虑自治系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (8.19)$$

其中$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_n(\mathbf{x}))$ 满足初值问题解的存在和唯一性条件。

对于连续可微的标量函数$V(\mathbf{x}), |\mathbf{x}| \le M$，定义如下条件：

Definition 7.2.4. 记

$$\frac{dV}{dt}|_{(8.19)} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n.$$

条件I（V为定正条件）：$V(\mathbf{0}) = 0$；当$\mathbf{x} \neq 0$时$V(\mathbf{x}) > 0$。

条件II（$\frac{dV}{dt}|_{(8.19)}$为定负函数）：$\frac{dV}{dt}|_{(8.19)} < 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$。

条件II^*（$\frac{dV}{dt}|_{(8.19)}$为常负函数）：$\frac{dV}{dt}|_{(8.19)} \le 0$。

条件III（$\frac{dV}{dt}|_{(8.19)}$为定正函数）：$\frac{dV}{dt}|_{(8.19)} > 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$。

Theorem 7.2.5. *定理8.4（Lyapunov稳定性第二方法）：*

（1）若I和II成立，则方程（８.１９）的零解是渐近稳定的。

（２）若I和II^*成立，则方程（８.１９）的零解是稳定的。

（3）若I和III成立，则方程（８.１９）的零解是不稳定的。

利用Lyapunov第二方法判断解的稳定性直接简明，但却没有一般的方法具体给出Lyapulov函数。所以一个主要问题是对于给定的微分方程，如何构造Lyapunov函数，从而判断解的稳定性。

【例】单摆振动

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -a^2 \sin x. \quad (8.8)$$

令（能量函数）

$$V(x, y) = y^2 - 2a^2 \cos x + 2a^2,$$

则在平衡点$(0, 0)$附近满足条件I，并且满足条件II^*即

$$\frac{dV}{dt} = -2a^2 y \sin x + 2a^2 y \sin x = 0.$$

因此平衡点$(0, 0)$稳定。

作业：2，4，5，6，8

第八章　边值问题

在前几章中我们已相当详细地讨论了常微分方程的初值问题及其解法。另外，我们也接触到所谓微分方程的边值问题，例如悬链线问题。本章将讨论某些二阶微分方程的边值问题，而以施图姆-刘维尔（Sturm-Liouville）边值问题为重点，因为它在数学物理中有重要的应用。特别的，为偏微分方程分离变量法提供理论基础。

§8.1　Sturm比较定理

Sturm是在微分方程中最早使用定性方法的先驱者之一。如上一章所见，这种定性方法的主要特点是不依赖于对微分方程的求解，而只凭方程本身的一些特征来确定解的有关性质，例如解的变号和周期性等。我们讨论二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (9.1)$$

其中系数函数$p(x), q(x)$在区间J上是连续的。

Lemma 8.1.1. *齐次线性微分方程（9.1）的任何非零解在区间J内的零点孤立。*

证明：任给（9.1）的一个非零解$y = \varphi(x), x \in J$。假设它有一个非孤立的零点$x_0 \in J$。因此，在J内$y = \varphi(x)$有一串零点$x_n, n = 1, 2, \cdots, x_n \neq x_0, x_n \to x_0$。因此

$$\varphi'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

这就是说，非零解$y = \varphi(x)$满足初值条件

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0. \quad (9.2)$$

然而我们已知初值问题（9.1+9.2）有零解。因此，根据解的唯一性，$y = \varphi(x)$就是零解，矛盾。所以非零解$y = \varphi(x)$的零点必须是孤立的。 □

设$y = \varphi(x)$是齐次线性方程（9.1）的一个非零解，而且x_1是它的一个零点。根据上面的引理，x_1是一个孤立的零点。这样我们可以考虑$y = \varphi(x)$在x_1的左（或右）边距x_1 最近的零点$x_2 < x_1$（或$x_2 > x_1$）（如果存在的话）。我们称x_1, x_2为相邻的零点，因此在相邻的两个零点之间没有其他零点。

下面的一些定理最早是由Sturm采用定性方法证明的。这种简单的思想后来发展成为微分方程的近代定性理论。

Theorem 8.1.2. 定理*9.1.* 设$y=\varphi_1(x)$和$y=\varphi_2(x)$是齐次线性方程（*9.1*）的两个非零解。则下述结论成立：

（*1*）它们是线性相关的，当且仅当它们有相同的零点；

（*2*）它们是线性无关的，当且仅当它们的零点是互相交错的。

证明：（1）首先设$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$线性相关，则有

$$\varphi_2(x)=c\varphi_1(x),\quad x\in J,$$

其中常数$c\neq 0$。由此可见，它们有相同的零点。

反之，设$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$有一个相同的零点$x_0\in J$，则它们的朗斯基行列式$W(x_0)=0$，从而由刘维尔公式推出$W(x)\equiv 0, x\in J$。所以$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$线性相关。

（2）设$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$的零点是相互交错的，因此它们没有相同的零点，从而是线性无关的。以下证明线性无关解，它们的零点相互交错。

设$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$线性无关，由（1）它们没有相同的零点。设$x_1,x_2$是$\varphi_1(x)$的两个相邻零点，不妨设

$$\varphi_1(x)>0,\quad x_1<x<x_2.$$

从而又由于$y=\varphi_1(x)$为非零解，由解的唯一性

$$\varphi_1'(x_1)>0,\quad \varphi_1'(x_2)<0.\quad (9.3)$$

因为$\varphi_2(x)$与$\varphi_1(x)$没有相同的零点，所以x_1,x_2都不是$\varphi_2(x)$的零点，即

$$\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2)\neq 0.$$

我们接下来说明$\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2)<0$，由此推出$\varphi_2(x)$在$x_1,x_2$之间至少有一个零点$\widetilde{x}_1\in(x_1,x_2)$。

反设$\varphi_2(x_1),\varphi_2(x_2)$同号，即

$$\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2)>0.\quad (9.4)$$

由线性无关，$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$的朗斯基行列式$W(x)$在区间$J$上不等于零，所以我们有

$$W(x_1)W(x_2)>0.\quad (9.5)$$

又有

$$W(x_1)=-\varphi_2(x_1)\varphi_1'(x_1),\quad W(x_2)=-\varphi_2(x_2)\varphi_1'(x_2)$$

因此，不等式蕴含

$$\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_1'(x_1)\varphi_1'(x_2) > 0.$$

再利用（9.4）得

$$\varphi_1'(x_1)\varphi_1'(x_2) > 0.$$

这与（9.3）矛盾。

因此，$\varphi_2(x_1), \varphi_2(x_2)$异号，由此推出$\varphi_2(x)$在$x_1, x_2$之间至少有一个零点$\widetilde{x}_1 \in (x_1, x_2)$。如果$\varphi_2(x)$在$x_1, x_2$之间有两个零点$\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$。那么用以上相同的论证可以推出，$\varphi_1(x)$在$\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$之间必有零点，从而在$x_1, x_2$之间还至少有一个零点，这与$x_1, x_2$是$\varphi_1(x)$的相邻零点矛盾。所以$\varphi_2(x)$在$x_1, x_2$之间有且只有一个零点。

同样可证，$\varphi_1(x)$在$\varphi_2(x)$的任何两个相邻零点之间有且只有一个零点。这就证明了$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$的零点是互相交错的。 □

利用Sturm比较定理，可通过与更简单的方程进行比较来分析方程（9.1）的零点，振动性。

Theorem 8.1.3. 设有两个齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0, \quad (9.6)$$

和

$$y'' + p(x)y' + R(x)y = 0, \quad (9.7)$$

这里系数函数$p(x), Q(x), R(x)$在区间J上连续，而且满足不等式

$$R(x) \geq Q(x), \quad x \in J. \quad (9.8)$$

又设$y = \varphi(x)$是方程（*9.6*）的一个非零解，x_1, x_2是它的相邻零点。则方程（*9.7*）的任何非零解$y = \psi(x)$在x_1, x_2之间至少有一个零点$x_0 \in [x_1, x_2]$。

证明：首先，$\varphi_1(x_1) = \varphi_1(x_2) = 0$，而且不妨设$\varphi(x) > 0, x_1 < x < x_2$。由此，

$$\varphi'(x_1) > 0, \quad \varphi'(x_2) < 0. \quad (9.9)$$

要证：$y = \psi(x)$在$[x_1, x_2]$上至少有一个零点。

否则，不妨设

$$\psi(x) > 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2. \quad (9.10)$$

考虑$\varphi(x), \psi(x)$的朗斯基行列式

$$W(x) = \varphi(x)\psi'(x) - \psi(x)\varphi'(x).$$

它满足

$$\begin{aligned} W' &= \varphi\psi'' - \psi\varphi'' \\ &= \varphi(-p\psi' - R\psi) - \psi(-p\varphi' - Q\varphi) \\ &= -pW + (Q - R)\varphi\psi. \end{aligned}$$

从而

$$W' + pW \le 0, \quad x \in (x_1, x_2),$$

$$e^{\int_{x_1}^{x} p(s)ds}[W' + pW] \le 0, \quad x \in (x_1, x_2),$$

$$\frac{d}{dx}[e^{\int_{x_1}^{x} p(s)ds}W] \le 0, \quad x \in (x_1, x_2),$$

$$e^{\int_{x_1}^{x_2} p(s)ds}W(x_2) \le W(x_1). \quad (9.11)$$

另一方面，由（9.9，9.10）

$$W(x_1) = -\psi(x_1)\varphi'(x_1) < 0, \quad W(x_2) = -\psi(x_2)\varphi'(x_2) > 0.$$

这与（9.11）矛盾。因此，$y = \psi(x)$在$[x_1, x_2]$上至少有一个零点。 □

注：如果$Q(x) > R(x), x \in J$，则一定有零点$x_0 \in (x_1, x_2)$。证明方法完全类似，只需注意到（9.11）为严格不等号。另外，由Sturm比较定理，取$Q(x) = R(x) = q(x)$可知，（9.1）的两个线性无关解的零点互相交错。

利用Sturm比较定理，可以判别解是否振动。

Definition 8.1.4. 设$y = \varphi(x)$是齐次线性微分方程（*9.1*）的一个非零解。如果$y = \varphi(x)$在区间J上最多只有一个零点，则称它在J上是非振动的；否则称它在J上是振动的。如果$y = \varphi(x)$在区间J上有无限个零点，则称它在J上是无限振动的。

Theorem 8.1.5. （*1*）设齐次线性微分方程（*9.1*）中的系数$q(x) \le 0, x \in J$，则它的一切非零解都是非振动的。

（*2*）设微分方程

$$y'' + Q(x)y = 0, \quad (9.13)$$

中$Q(x)$在区间$x \in [a, \infty)$上连续，并且满足不等式

$$Q(x) \ge m > 0.$$

则微分方程（*9.13*）的任何非零解在区间$[a, \infty)$上是无限振动的；而且它的任意两个相邻零点的间距不大于常数$\pi/\sqrt{m}$。

证明:（1）将（9.1）与方程

$$y'' + p(x)y' = 0 \quad (9.12)$$

进行比较。显然,（9.12）有非零解

$$y = \psi(x) \equiv 1, \quad x \in J.$$

如果（9.1）的非零解$y = \varphi(x)$在J上至少有两个不同的零点x_1, x_2，则由Sturm比较定理（9.12）的非零解$y = 1$在$[x_1, x_2]$上至少有一个零点。矛盾。因此，$y = \varphi(x)$在J上至多有一个零点。

（2）根据解的延拓分析,（9.13）在$[a, +\infty)$上有解。我们只要证明任意区间$I = [b, b + \pi/\sqrt{m}], b \geq a$上必有$y = \varphi(x)$的零点。将（9.13）与方程

$$y'' + my = 0$$

进行比较。易知后一方程有非零解

$$y = \sin[\sqrt{m}(x - b)],$$

而且它以区间I的两个端点为零点。因此，根据Sturm比较定理推出方程（9.13）的非零解$y = \varphi(x)$ 在区间I上至少有一个零点。 □

作业：1，2，5

偏微分方程基本概念和分类：

一个偏微分方程指的是一个关于两个或多个自变量的未知函数$u: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$以及其偏导数的等式

$$F(\mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_n^{m_n}}) = 0,$$

其中最高阶导数的阶数$m = m_1 + \cdots + m_n$称为方程的阶。

我们目前一般不讨论偏微分方程组。偏微分方程分为线性与非线性偏微分方程。如果偏微分方程中与未知函数有关的部分为u及u的偏导数的线性组合（系数一般依赖于x），则称方程为线性偏微分方程。形如

$$F(x, u, D^1 u, \cdots, D^m u) = f(x) + a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \cdots = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D^\alpha u + f(x) = 0.$$

我们主要讨论二阶线性方程定解问题的一些求解方法以及理论。

非线性方程又分为半线性（含最高阶导数的部分为其线性组合，且其系数只含x，而与未知函数及其他偏导数无关），即形如

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, \cdots, Du, u, x) = 0;$$

拟线性（含最高阶导数的部分为其线性组合，其系数只与低阶导数有关），即形如

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(D^{k-1} u, \cdots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, \cdots, Du, u, x) = 0;$$

连拟线性都不是的称为完全非线性。

经典的数学物理中有许多二阶线性方程的例子，Yang-Mills方程为二阶半线性方程组，Einstein方程为二阶拟线性方程组。

§8.2 泛定方程与定解问题

§8.2.1 三类典型二阶线性方程的导出：

（1）弦振动方程：

设均匀弹性细弦在$x-u$平面内振动，$u=0$为弦的平衡位置。考虑$x=0$与$x=1$之间的一段弦。假定振动过程中$|u| \ll 1, |\frac{\partial u}{\partial x}| \ll 1$，并且弦上各点在$x$方向的位移相对于在$u$方向的位移可忽略，即弦上各点只在$u$方向振动。弦的长度为$L(t) = \int_0^1 \sqrt{1+|\frac{\partial u}{\partial x}|^2}dx$。由于$|\frac{\partial u}{\partial x}| \ll 1$，不妨设$L(t) \equiv 1$。于是由胡克定律，弦内部张力大小$T$不变，设弦的张力大小为$T$（不依赖于$x,t$）。弦段的右端点所受张力按$x-u$分解为$(T_1, T_2)$，因为$|\frac{\partial u}{\partial x}| \ll 1$，设$T_1 = T$为常数。

利用微元法作受力分析：取$0<\delta \ll 1$，考虑$[x_0, x_0+\delta]$之间的一段弦。设在u方向受张力以及外力$g(t,x)$，于是由牛顿第二定律

$$T_2(x, x_0+\delta) - T_2(t, x_0) + \int_{x_0}^{x_0+\delta} g(t,x)dx = \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho dx,$$

即

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho dx = \int_{x_0}^{x_0+\delta} [\frac{\partial T_2}{\partial x} + g(t,x)].$$

注意到$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\partial u}{\partial x}$，于是

$$T_2 = \frac{\partial u}{\partial x}T_1 = \frac{\partial u}{\partial x}T.$$

所以

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = \int_{x_0}^{x_0+\delta} [T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(t,x)].$$

由δ的任意性，u满足

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(t,x).$$

或者写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x),$$

其中

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad f(t,x) = g(t,x)/\rho.$$

注：弹性杆的振动、薄膜的振动、声波都遵循类似的方程，形如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \triangle u + f(t,x),$$

其中$x=(x_1, \cdots, x_n), \triangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$为Laplace算子。此类方程称为波动方程。

（2）热传导方程：

设U为$\mathbb{R}^3$中一传热区域，其边界为∂U，U中各点的温度记为$u(t,x_1,x_2,x_3)$。

考虑能量的出入：由Fourier热传导定律，从边界流入热量为

$$\int_{\partial U} k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}dS,$$

其中$k(x)$为x处的热传导系数（设为正常数），ν为单位外法向。设另有热源，单位时间内在U内部产生热量为

$$\int_U g(t,x)dx.$$

而在单位时间内U中温度变化所需的热量为

$$\int_U c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx,$$

其中c为比热常数，ρ为介质密度常数。因此，由Gauss公式

$$\int_U c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx=\int_{\partial U} k\frac{\partial u}{\partial \nu}dS+\int_U g(t,x)dx=\int_U (k\triangle u+g(t,x))dx.$$

由U的任意性，

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\triangle u+g(t,x).$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\triangle u+f(t,x),\quad a=\sqrt{k/c\rho}, f=g/(c\rho).$$

称为热传导方程。

注：扩散现象也遵循热传导方程。若温度不随时间变化，则有稳态方程

$$\triangle u=-\frac{1}{a^2}f(x),$$

称为Poisson方程。若$f=0$，则有$\triangle u=0$，称为Laplace方程（或调和方程）。

（3）静电场方程，引力势方程：

设电荷分布为$\rho(x,y,z)$，产生稳恒电场$\overrightarrow{E}(x,y,z)$。取$U\subset\mathbb{R}^3$单连通，边界记为$\partial U$，单位外法向为$\nu$。由Gauss定律，通过$\partial U$的电通量为

$$\int_{\partial U} <\overrightarrow{E},\nu> dS=\frac{1}{\epsilon_0}\int_U \rho dx,$$

其中ϵ_0为介电常数。由Gauss公式，

$$\int_{\partial U} <\overrightarrow{E},\nu> dS=\int_U div(\overrightarrow{E})dx.$$

因此

$$div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

由法拉第定律：静电场沿任意闭路C的电势变化为零，即

$$\int_C \overrightarrow{E} \cdot Tdl = 0.$$

因此通过积分，存在势函数φ使得$\overrightarrow{E} = -\nabla\varphi$。代入$div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$得Poisson方程

$$\triangle\varphi = -\rho/\epsilon_0.$$

(注：法拉第定律

$$\int_C \overrightarrow{E} \cdot Tdl = \int_C (E_1dx + E_2dy + E_3dz) := \int_C E = 0$$

等价于E无旋：$\nabla \times \overrightarrow{E} = 0$，等价于$dE = 0$。事实上由Stokes定理，对任意以$C$为边界的曲面$S$，

$$\int_C E = \int_S dE = \int_S [(\partial_x E_2 - \partial_y E_1)dx \wedge dy + (\partial_z E_1 - \partial_x E_3)dz \wedge dx + (\partial_y E_3 - \partial_z E_2)dy \wedge dz]$$

选取$\nu = e_1 \times e_2$，则$(dx \wedge dy)(e_1, e_2) = dz(\nu) =< \partial_z, \nu >= \nu_3$，因此

$$\int_S dE = \int_S [(\partial_x E_2 - \partial_y E_1)\nu_3 + (\partial_z E_1 - \partial_x E_3)\nu_2 + (\partial_y E_3 - \partial_z E_2)\nu_1]dS = \int_S \nabla \times \overrightarrow{E} \cdot \nu dS.$$

从而对任意曲面S，

$$\int_S \nabla \times \overrightarrow{E} \cdot \nu dS = 0,$$

由S的任意性，

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = 0.)$$

引力势满足同样的方程：设空间有质量分布，密度为$\rho(x, y, z)$，设其引力势为$\Phi(x, y, z)$。则引力$\overrightarrow{F} = -\nabla\Phi$，另一方面

$$div(\overrightarrow{F}) = -4\pi G\rho,$$

其中G为万有引力常数，因此引力势满足Possion方程

$$\triangle\Phi = 4\pi G\rho.$$

当然，如果考虑区域内无电荷分布，或无物质分布，我们得到Laplace方程。

（4）自由电磁波方程：

设空间中无电荷，介电常数为ϵ，导磁系数为μ，电导率为σ，电场强度为E，磁场强度为H。回顾Maxwell方程组（分别为无电荷分布时的高斯定律，高斯磁定律，法拉第电磁感应定律，Maxwell-Ampere定律）

$$\nabla\cdot E=0,\quad \nabla\cdot H=0;$$
$$\nabla\times E=-\mu\frac{\partial H}{\partial t},\quad \nabla\times H=\sigma E+\epsilon\frac{\partial E}{\partial t}.$$

推导E和H满足的方程：由Maxwell-Ampere定律，

$$\begin{aligned}\epsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times H)\\ &= \nabla\times(\frac{\partial H}{\partial t})=-\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times E),\end{aligned}$$

另一方面

$$\nabla\times(\nabla\times E)=-\triangle E+\nabla(\nabla\cdot E),$$

因此无电荷分布情形电场满足偏微分方程组

$$\epsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\triangle E.$$

即

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial E}{\partial t}-\triangle E=0.$$

类似对H有

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial H}{\partial t}-\triangle H=0.$$

特别如果电导率$\sigma=0$，则有自由电磁波方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=a^2\triangle E,\quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=a^2\triangle H,\quad a=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

三类典型方程：波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\triangle u+f(t,x);$$

热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\triangle u+f(t,x);$$

以及泊松方程：

$$\triangle u=f(x).$$

目前，我们主要讨论上述三个类型的二阶常系数线性偏微分方程。如果自由项$f=0$，则称方程为齐次的；否则称为非齐次方程。

§8.2.2 定解条件与定解问题

上述三类方程反映了系统的一般规律，这样的方程称为泛定方程。为确定一个完整的物理状态，仍需要另外的约束条件，称为定解条件。泛定方程配以适当的定解条件构成一个偏微分方程的定解问题。

定解条件包括初始条件（Cauchy条件）、边界条件两大类。定解问题又相应的分为初值问题（Cauchy问题）、边值问题、混合问题（初边值问题，同时包含初始条件和边界条件）。

（一）全空间上发展方程的初始条件与初值问题：对于随时间变化的物理过程，即发展方程，通常需考虑初始条件。

【例】全空间上的热传导方程的初值问题

$$u_t = a^2\triangle u + f(t,x), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

全空间上的波动方程的初值问题

$$u_{tt} = a^2\triangle u + f(t,x), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

初始条件给出未知函数u及其关于t的各阶偏导数在$t = t_0$时刻的值。如果方程中关于t的最高阶导数是m阶的，则应给出$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \cdots, \frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}$ 在$t = t_0$时刻的值。

（二）边界条件与边值问题：考虑稳态问题，若该问题所在的区域带有边界，通常要考虑边界条件。常见的边界条件由如下形式给出

$$(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial \nu})|_{\partial U} = \varphi(x),$$

其中α, β, φ为给定的定义在∂U上的函数。$\varphi = 0$时所对应的边界条件称为齐次的。

Definition 8.2.1. *（1）$\beta = 0, \alpha \neq 0$，称为第一类边界条件或Dirichilet条件。*

（2）$\alpha = 0, \beta \neq 0$，称为第二类边界条件或Neumann条件。

（3）$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$，称为第三类边界条件或Robin条件。

【例】给定边界温度（或电势）的稳恒温度场（或静电场）对应泊松方程第一类边值问题（Dirichlet边值问题）

$$\triangle u = f(x), \quad x \in U; \quad u|_{\partial U} = \varphi(y), \quad y \in \partial U.$$

边界绝热的稳恒温度场对应（如下面热传导问题的讨论）第二类齐次边值问题（Neumann边值问题）

$$\triangle u = f(x), \quad x \in U; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial U} = 0.$$

（三）混合问题：对于带边界区域上的发展方程（波动方程、热传导方程），所加的定解条件包含初始条件和边界条件，这样的定解问题称为混合问题（初边值问题）。

（1）热传导方程：$u_t = a^2 \triangle u + f(t,x)$，此时需要初始条件：

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in U.$$

此外还需要附加边界条件。常见的有如下几类边界条件：

第一类：$u|_{\partial U} = g(t,y), y \in \partial U$。即已知边界在各时刻的温度。

第二类：已知∂U上向外流出热量的热流密度$q(t,y)$，则由Fourier热传导定律

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial U} = -\frac{q(t,y)}{k}, \quad t > 0, y \in \partial U,$$

其中k为介质的热传导系数。特别表面绝热时，对应第二类齐次边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial U} = 0.$$

第三类：内边界温度为$u(t,x)$，外边界温度为$\theta(t,x)$。因此由牛顿冷却定理，热流密度

$$q(t,x) = h(x)(u(t,x) - \theta(t,x)),$$

其中$h(x) > 0$为热交换系数。另一方面由Fourier热传导定律

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{q}{k}$$

因此有边界条件

$$h(x)u + k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(x)\theta(t,x), \quad x \in \partial U.$$

如果第一类边界条件中$g \equiv 0$，第二类边界条件中$q \equiv 0$，第三类边界条件中$\theta \equiv 0$，此时分别对应齐次边界条件。

【例】设均匀细杆长为l，侧表面与周围介质无热交换，内部有热源$g(t,x)$。初始温度为$\varphi(x)$，杆右端绝热，左端与周围介质有热交换，则对应的定解问题为

$$\begin{cases} u_t = \frac{k}{c\rho}u_{xx} + \frac{1}{c\rho}g(t,x), \quad 0 < x < l, t > 0; \\ u(0,x) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0, \quad (hu - k\frac{\partial u}{\partial x})|_{x=0} = h(0)\theta(t,0). \end{cases}$$

类似可考虑弦振动方程的混合问题，初始条件由$u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x)$如同初始条件的讨论。接下来分析弦振动过程的几类边界条件。

（2）弦振动方程的边界条件：

第一类：已知各时刻端点位置

$$u(t,0)=\mu(t),\quad u(t,l)=\nu(t),$$

$\mu=\nu=0$时称为第一类齐次边界条件。

第二类：已知端点在u轴方向所受力，在$x=0$处为$\mu(t)$，$x=l$处为$\nu(t)$。则由牛顿第二定律（此时微元所受外力$\int_0^\delta g(t,x)dx$，以及惯性力$\int_0^\delta \rho u_{tt}dx$都是$\delta$的一阶无穷小量，因此不出现）

$$Tu_x(t,0)+\mu(t)=0,\quad -Tu_x(t,l)+\nu(t)=0$$

因此有边界条件

$$u_x(t,0)=-\frac{\mu(t)}{T},\quad u_x(t,l)=\frac{\nu(t)}{T}.$$

如果其中某端点（设$x=0$）在u方向不受其他外力，则该端点在u方向自由滑动，称为自由端，此时

$$\mu(t)=0,\quad u_x(t,0)=0,$$

称为第二类齐次边界条件。

第三类：弦端点固定在u方向（上方）的弹簧上，并受u方向其他外力，此时

$$Tu_x(t,0)+\mu(t)-ku(t,0)=0,\quad -Tu_x(t,l)+\nu(t)-ku(t,l)=0.$$

因此有第三类边界条件

$$(Tu_x-ku)|_{x=0}=-\mu(t),\quad (Tu_x+ku)|_{x=l}=\nu(t).$$

如果$\mu=\nu=0$，称为第三类齐次边界条件。

定解问题的适定性：泛定方程加上适当的定解条件构成一个定解问题，它可描述完整的物理状态。一个定解问题是适定的包括存在性、唯一性和稳定性几方面。这里稳定性指的是定解条件的偏差在一定的小范围之内时，相应的定解问题的解的偏差可以控制在任意事先给定的小范围内。之前根据实际情形给出的定解问题的例子一般是适定的。

但如果对定解问题的提法不合适，就可能导致问题的不适定性。Hadamard曾给出一个著名的例子，说明对调和方程提初边值问题是不适定的。

【例（Hadamard，1917）】调和方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<\pi, y>0 \\ u(x,0)=0, u_y(x,0)=\frac{1}{n^k}\sin nx, n\in\mathbb{N} \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0. \end{cases}$$

该初边值问题存在唯一解

$$u(x,y)=\frac{1}{n^{k+1}}\sin(nx)\sinh(ny), \quad n\in\mathbb{N}.$$

但此解不稳定:$n\to\infty$时，初始条件一致趋于零。另一方面对任意给定$y_0>0, u(x,y_0)=\frac{1}{n^{k+1}}\sin(nx)\sinh(ny)$无界。与齐次初边值问题的解$u\equiv 0$相比较可知，解在连续函数空间范数下是不稳定的。从而该定解问题是不适定的，即调和方程的初边值问题（及初值问题）不是适定的。

习题：1. 设$r=\sqrt{x^2+y^2}, r\neq 0$

(1) $\triangle_2 u=0$，求特解$u=u(r)$

(2) $\triangle_2 u+k^2u=0$，k为常数，求$u=u(r)$所满足的常微分方程。

2. 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, r\neq 0$

(1) $\triangle_3 u=0$，求特解$u=u(r)$

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\triangle_3 u=0$，设$u=e^{i\omega t}R(r)$，求$R(r)$所满足的方程。

§8.3 分离变量法

§8.3.1 几个典型例子

【例1】两端固定弦的自由振动的混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, x \in (0, l) \quad (a) \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad (b) \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x). \quad (c) \end{cases}$$

解:（1）利用分离变量法求解，考虑变量分离的函数

$$u(t, x) = T(t)X(x),$$

代入方程（a）则有

$$T''X = a^2 X''T,$$

即

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

因左边与x无关，右边与t无关，因此两边只能为一常数，设为$-\lambda$。从而，

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + \lambda a^2 T = 0.$$

由边界条件（b），

$$u(t, 0) = T(t)X(0) = 0, \quad u(t, l) = T(t)X(l) = 0,$$

因此非零解须$X(0) = X(l) = 0$。

（2）求解固有值问题：$X(x)$满足常微分方程边值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0. \quad (*) \end{cases}$$

若$\lambda = -\omega^2 < 0$，则解常微分方程组易得通解为

$$X(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x},$$

由边界条件得

$$A + B = 0, \quad Ae^{\omega l} + Be^{-\omega l} = 0.$$

因此此时$A = B = 0, X \equiv 0$。即无非零解。

若$\lambda=0$，则通解为

$$X(x)=Ax+B,$$

由边界条件得

$$A=B=0,\quad X(x)\equiv 0.$$

事实上，由9.1，非零解都是非振动的，即至多一个零点。

若$\lambda=\omega^2>0$，则通解为

$$X(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x),$$

由边界条件得

$$A=0,\quad \omega=\frac{n\pi}{l},\quad n\in\mathbb{N},$$

此时记

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l},\quad X_n(x)=B_n\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

$(*)$称为固有值问题(eigenvalue problem)，使固有值问题有非零解的λ称为固有值（特征值），相应的非零解称为固有函数（特征函数）。$(*)$的固有值和相应的固有函数为

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,\quad X_n(x)=B_n\sin(\frac{n\pi x}{l}),\quad n\in\mathbb{N}.$$

这里的特征值问题是最简单的一个例子，但也非常具有代表性，反映出特征值问题的诸多规律。

接下来，由λ_n求解$T_n(t)$：

$$T_n''(t)+\lambda_n a^2 T_n=0,$$

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{an\pi t}{l}+D_n\sin\frac{an\pi t}{l}.$$

从而得到一族满足（a,b）的变量分离形式的特解

$$u_n(t,x)\ =\ X_n(x)T_n(t)=(C_n\cos\frac{an\pi t}{l}+D_n\sin\frac{an\pi t}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

（3）由初始条件求解定解问题：

$u_n(t,x)$满足泛定方程（a）以及边界条件（b），其线性叠加仍满足（a,b）。现在通过线性叠加及系数的选取使得叠加后的解满足初始条件。设

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{an\pi t}{l}+D_n\sin\frac{an\pi t}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

若$u(t,x)$满足（c），则

$$u(0,x)=\sum_{n\geq 1}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x),\quad \sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x).$$

这正好是$\varphi(x),\psi(x)$的Fourier正弦展开，即

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

因此，

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\cos\frac{an\pi t}{l}+\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\sin\frac{an\pi t}{l}]\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

注：以上通过分离变量法求得形式解，当初值φ,ψ满足一定的正则性以及边界条件时，级数收敛，并且$u(t,x)$为古典解。用能量积分可证得解的唯一性、稳定性。

级数解将弦的复杂振动分解为一系列两端固定的有界弦的固有振动的叠加，这里固有振动即

$$\begin{aligned}u_n(t,x)&=(C_n\cos\frac{an\pi t}{l}+D_n\sin\frac{an\pi t}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}=\alpha_n\sin(\frac{an\pi t}{l}+\theta_n)\sin\frac{n\pi x}{l},\\ &\alpha_n=\sqrt{C_n^2+D_n^2}.\end{aligned}$$

$u_n(t,x)$保持端点$x=0,x=l$不变；各点在平衡位置附近作简谐振动，振幅为$\alpha_n|\sin\frac{n\pi x}{l}|$；各点的振动频率（与初始条件无关，只与弦有关，称为固有频率）同为$\omega_n=\frac{an\pi}{l}$；周期为$T_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=\frac{2l}{na}$。最低的固有频率$\frac{\pi a}{l}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$称为弦的基频，其余为倍频。$u_n(t_0,x)=\alpha_n\sin(\omega_n t_0+\theta_n)\sin\frac{n\pi x}{l}$为正弦曲线。

【例2】考虑无限长圆柱体$(x^2+y^2<a^2,-\infty<z<\infty)$上的稳态温度分布问题。假设内部无热源，边界柱面温度保持为$F(x,y)$。求柱内稳态温度分布。

解：因为边界柱面温度$F(x,y)$与z无关，所以我们其实是想求解一个与z无关的温度分布$u(x,y)$。所以化为求解

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0,\quad x^2+y^2<a^2,\\ u|_{x^2+y^2=a^2}=F(x,y).\end{cases}$$

采用极坐标(r,θ)，其中$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$。则$u(r,\theta)$满足

$$\begin{cases}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\quad r<a,\quad (a)\\ u|_{r=a}=F(a\cos\theta,a\sin\theta)=f(\theta).\quad (b)\end{cases}$$

（1）求满足（a）的变量分离的特解：令$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，则

$$R''\Theta+\frac{1}{r}R'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0,$$

$$\frac{r^2(R''+\frac{1}{r}R')}{R}+\frac{\Theta''}{\Theta}=0,$$

因此可设存在常数λ使得

$$\frac{r^2(R''+\frac{1}{r}R')}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda.$$

注意到Θ蕴含周期性条件（保证连续性）$\Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta)$，于是$\Theta$构成固有值问题

$$\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0,\\ \Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta).\end{cases}$$

（2）解固有值问题：当$\lambda=-\omega^2$，通解为

$$\Theta=Ae^{\omega\theta}+Be^{-\omega\theta},$$

此时无非零周期解；

当$\lambda=0$时，通解为

$$\Theta=B\theta+A,$$

有周期解

$$\Theta=A.$$

当$\lambda=\omega^2>0$，通解为

$$\Theta=A\cos(\omega\theta)+B\sin(\omega\theta),$$

满足周期条件的ω为$\omega=n,n\in\mathbb{N}$。

于是固有值问题的固有值及固有函数相应的为

$$\lambda_n=n^2,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$\Theta_n=A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta).$$

将$\lambda_n=n^2$代入得

$$r^2R''+rR'-n^2R=0.$$

这是Euler方程，作变量代换$r=e^t$，则有

$$R'=\dot{R}t',\quad R''=\ddot{R}(t')^2+\dot{R}t'',$$

因此

$$r^2(t')^2\ddot{R}+(r^2t''+rt')\dot{R}-n^2R=0,$$

即

$$\ddot{R}-n^2R=0,$$

因此

$$R_0=C_0+D_0t=C_0+D_0\ln r,$$

$$R_n=C_ne^{nt}+D_ne^{-nt}=C_nr^n+D_nr^{-n},\quad n\geq 1.$$

由u在$r=0$处的有界性，$D_n=0,n\geq 0$。因此令

$$R_0=1,\quad R_n=r^n,n\geq 1.$$

从而得到一族满足（a）的变量分离形式的特解

$$u_0(r,\theta)=R_0\Theta_0=A_0,\quad u_n(r,\theta)=R_n\Theta_n=(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n,n\geq 1.$$

（3）由边界条件求定解问题：由叠加原理，级数

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n\geq 1}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n$$

满足（a）。$u(r,\theta)$满足边界条件当且仅当

$$f(\theta)=A_0+\sum_{n\geq 1}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)a^n,$$

这是$f(\theta)$在$\theta\in[0,2\pi]$上的Fourier展开，其中

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi,$$

$$A_na^n\pi=\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,\quad B_na^n\pi=\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi,$$

即

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi+\frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}(\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\cos n\theta+\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi\sin n\theta)(\frac{r}{a})^n.$$

当$f(\theta)$连续时，$u(r,\theta)$为古典解；由最大值原理，可得解的唯一性、稳定性。

我们可以进一步化简所求的解，得到Poisson积分公式：

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}(\frac{r}{a})^n\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n(\varphi-\theta)d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)[1+2\sum_{n\geq 1}\cos n(\varphi-\theta)(\frac{r}{a})^n]d\varphi. \end{aligned}$$

令

$$z = \frac{r}{a}e^{i(\varphi-\theta)},$$

则

$$\cos n(\varphi-\theta)(\frac{r}{a})^n = Re(z^n),$$

$$\begin{aligned} & 1+2\sum_{n\geq 1}\cos n(\varphi-\theta)(\frac{r}{a})^n \\ = & 2Re(1+z+z^2+\cdots)-1 = 2Re(\frac{1}{1-z})-1 = -1+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-\overline{z}} \\ = & \frac{2-2Re(z)}{1+|z|^2-2Re(z)}-1 = \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2-2Re(z)} \\ = & \frac{1-(\frac{r}{a})^2}{1+(\frac{r}{a})^2-2\frac{r}{a}\cos(\varphi-\theta)} = \frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)}, \end{aligned}$$

从而我们有二维圆盘上Laplace方程Dirichlet边值问题的解的Poisson积分公式：

$$u(r,\theta) = \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)}d\varphi, \quad r<a.$$

【注1】：$\triangle_2 u = 0$的满足周期性条件的通解为

$$u(r,\theta) = C_0 + D_0\ln r + \sum_{n\geq 1}(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)(C_n r^n + D_n r^{-n}).$$

对于圆内域：$D_0 = D_n = 0$；而对于圆外域上的有界解u：$D_0 = C_n = 0, n\geq 1$；对于圆环域：$C_n, D_n, n\geq 0$由边值确定。

【注2】：在单复变中，有著名的黎曼映射定理，一个一般的单连通区域可以通过保角变换（全纯映射）映到单位圆盘，即有保角变换$F: U\to D$。而且在保角变换下，调和函数的调和属性仍保持，即在D上解出Laplace方程相应边值问题之后可通过保角变换回去得到U上的相应解。但是Poisson方程齐次Dirichlet边值问题解的一般存在性的严格证明经过Dirichlet，Riemann，Weierstrass，Hilbert，Poincare等人的工作才完整建立。现在的标准证明需要结合实变函数、泛函分析、偏微分方程理论。

【例3】考虑1维热传导定解问题（$h>0$）：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad t>0, 0<x<l, \\ u_x(t,0)=0, \quad u_x(t,l)+hu(t,l)=0, \\ u(0,x)=\varphi(x). \end{cases}$$

解：考虑变量分离形式的函数$u(t,x)=T(t)X(x)$，对X解固有值问题，叠加后由初值$\varphi(x)$确定定解。设

$$u(t,x)=T(t)X(x),$$

则

$$T'X = a^2 T X'',$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

因此有固有值问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ X'(0)=0, \quad X'(l)+hX(l)=0 \end{cases}$$

以及

$$T'+\lambda a^2 T=0.$$

解固有值问题：$\lambda\le 0$时固有值问题没有非零解。$\lambda=\mu^2>0$时，通解为

$$X=a\cos\mu x+b\sin\mu x.$$

由$X'(0)=0$可知$b=0$，$X=a\cos\mu x$。从而，由$X'(l)+hX(l)=0$可见

$$-\mu\sin(\mu l)+h\cos(\mu l)=0,$$

$$\tan(\mu l)=\frac{h}{\mu}.$$

设μ_n为其第n个正根，则固有值问题的解为

$$\lambda_n=\mu_n^2, n\in\mathbb{N}; \quad X_n(x)=A_n\cos(\mu_n x).$$

由

$$T'+a^2\mu_n^2 T=0,$$

得

$$T_n=B_n e^{-a^2\mu_n^2 t}.$$

设

$$u(t,x)=\sum_{n\geq 1}C_n e^{-a^2\mu_n^2 t}\cos(\mu_n x),$$

则由初值可见

$$u(0,x)=\sum_{n\geq 1}C_n\cos(\mu_n x)=\varphi(x)$$

$$C_n=\frac{1}{\|\cos(\mu_n x)\|^2}\int_0^l \varphi(x)\cos(\mu_n x)dx,$$

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}2(l+\frac{h}{\mu_n^2+h^2})^{-1}\int_0^l \varphi(x)\cos(\mu_n x)dx e^{-a^2\mu_n^2 t}\cos(\mu_n x).$$

注：如果$h=0$，此时固有值问题的解为

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,\quad X_n=A_n\cos\frac{n\pi x}{l},\quad n\geq 0.$$

从而

$$T_n=B_n e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t},$$

$$u(t,x)=\sum_{n\geq 0}C_n e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t}\cos\frac{n\pi x}{l}=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)dx+\frac{2}{l}\sum_{n\geq 1}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

分离变量法主要步骤:（1）分离变量得到固有值问题;（2）解固有值问题得到通解;（3）由定解条件确定通解中的叠加系数得到定解问题的形式解。下一次我们将介绍分离变量法的理论基础，特别是固有值问题的Sturm-Liouville理论。

作业：9（4）：求解定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+bu_x-u, & t>0, 0<x<l,\\ u(t,0)=u(t,l)=0, & u(0,x)=0, u_t(0,x)=\psi(x). \end{cases}$$

10（2）：求解边值问题（(r,θ)为极坐标）：

$$\begin{cases} \triangle_2 u=0, & a<r<b, 0<\theta<\alpha(<2\pi),\\ u|_{r=a}=0, & u_r|_{r=b}=\sin^2\theta,\\ u|_{\theta=0}=0, & u|_{\theta=\alpha}=0. \end{cases}$$

9（2）求定解问题：

$$\begin{cases} u_t=x^2u_{xx}+3xu_x-2u, & t>0, 1<x<e,\\ u(t,1)=u(t,e)=0,\\ u(0,x)=\frac{1}{x}[\sin(\pi\ln x)-\sin(2\pi\ln x)]. \end{cases}$$

§8.4 Sturm-Liouville固有值问题

在上一节利用分离变量法求解三类典型方程定解问题的例子中，我们都得到一个相应的固有值问题。它们都是二阶线性常微分方程的边值问题。解固有值问题的关键是所解出的固有函数系是否构成某相应函数空间中的完备正交系。例如，两端固定的自由弦振动中$\{\sin\frac{n\pi x}{l}\}_{n\geq 1}$ 为Fourier正弦展开的完备正交系；圆盘内稳态温度场例子中$\{\cos n\theta, \sin n\theta\}_{n\geq 0}$为Fourier展开中的完备正交系；两端绝热的热传导问题中$\{\cos\frac{n\pi x}{l}\}_{n\geq 0}$为Fourier 余弦展开的完备正交系。这是分离变量法求解的理论基础。

考虑

$$b_0(x)y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in [a, b].$$

我们可以通过积分因子把它化为SL型方程。找积分因子$\rho(x)$：设$\rho > 0, b_0 > 0$

$$\rho b_0 y'' + \rho b_1 y' = (\rho b_0 y')' - (\rho b_0)' y' + \rho b_1 y',$$

因此要求

$$(\rho b_0)' = \rho' b_0 + \rho b_0' = \rho b_1,$$

从而

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{b_1 - b_0'}{b_0},$$

$$(\log\rho)' = \frac{b_1}{b_0} - (\log b_0)',$$

$$\log\rho + \log b_0 = \int\frac{b_1}{b_0},$$

$$\rho(x) = \frac{1}{b_0(x)}\exp\int\frac{b_1}{b_0}.$$

因此得到

$$(\rho b_0 y')' + b_2\rho y + \lambda\rho y = 0, \quad k := \rho b_0 = \exp\int\frac{b_1}{b_0}.$$

另外，三类典型方程在柱坐标、球坐标下分离变量后都得到这种类型的方程。

所以，我们考虑如下Sturm-Liouville（SL）型的方程：

$$[k(x)y']' + [-q(x) + \lambda\rho(x)]y = 0, \quad (1)$$

其中λ为参数，系数函数k, q, ρ在区间$[a, b]$上连续，并且k可微。通常假定

$$\rho|_{[a,b]} > 0, \quad k|_{(a,b)} > 0, \quad q|_{[a,b]} \geq 0.$$

另外我们记固有值问题的边界条件为(bc)。从而，考虑Sturm-Liouville固有值问题：

$$\begin{cases} [k(x)y']' + [-q(x) + \lambda\rho(x)]y = 0, \quad x \in (a,b) \\ (bc) \end{cases}$$

设当$\lambda = \lambda_0$时该固有值问题有非零解$y = \varphi(x)$，则称λ_0为该固有值问题特征值，称$y = \varphi(x)$为相应的特征函数。

回顾两端固定自由弦振动对应的SL固有值问题：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

它的特征值和相应的特征函数为

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, \quad X_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{l}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

由Fourier级数理论知道，特征函数系$X_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{l}), n \in \mathbb{N}$在区间$[0,l]$上组成一个完备的正交函数系。我们可以把$[0,l]$上满足$f(0) = f(l) = 0$的连续函数展开成Fourier级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

这也是两端固定自由弦振动可用分离变量法求解的原因（每一时刻t_0，$u(t_0,x)$可用这里$\{X_n\}$展开，因此解具有形式$u(t,x) = \sum_{n\geq 1} T_n(t)X_n(x)$）。我们将把上述性质和结论推广到一般的SL固有值问题。

对于$y \in C^2[a,b]$，定义线性算子

$$Ly = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}(ky') + \frac{q}{\rho}y.$$

则SL型方程（1）可表示成

$$Ly = \lambda y.$$

定义函数空间$L^2_{\rho,bc}[a,b]$及其内积为：

$$L^2_{\rho,bc}[a,b] := \{f(x)\text{满足(bc)，且}\int_a^b f^2\rho dx < \infty\},$$

$$< f,g >_\rho := \int_a^b fg\rho dx.$$

如果$< f,g >_\rho = 0$，我们称f,g正交，记为$f \perp_\rho g$或简单记作$f \perp g$。

计算

$$\begin{aligned}< Lf,g >_\rho &= \int_a^b [-\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}(kf')+\frac{q}{\rho}f]g\rho dx\\ &= \int_a^b [-\frac{d}{dx}(kf')+qf]gdx\\ &= -kf'g|_a^b+\int_a^b (kf'g'+qfg)dx,\end{aligned}$$

因此

$$< Lf,g >_\rho - < Lg,f >_\rho = -[kf'g-kfg']_a^b.$$

从而当$[kf'g-kfg']_a^b=0$时，

$$< Lf,g >_\rho = < f,Lg >_\rho,$$

此时称L为自共轭算子。

L为自共轭算子的一些充分条件：

（1）设(bc)为在$x=a$以及$x=b$分别满足三类齐次边界条件中的一种。对于第一类、第二类齐次边界条件，显然$f'g-fg'$在边界点为零。对第三类齐次边界条件，即

$$y(a)+K(a)y'(a)=0,\quad y(b)+K(b)y'(b)=0,$$

其中常数$K\neq 0$。在该边界点

$$f'g-fg'=f'(-Kg')-(-Kf')g'=0.$$

因此对情形（1），L自共轭。

（2）设(bc)为周期性边界条件：$X(a)=X(b),X'(a)=X'(b)$且$k(a)=k(b)$。则

$$[kf'g-kfg'](b)-[kf'g-kfg'](a)=0.$$

此时L也是自共轭的。

（3）自然边界条件：在边界处，$k=0,|y|<\infty$。

由之前计算，

$$< LX,X >_\rho = \int_a^b [k(X')^2+qX^2]dx-kX'X|_a^b.$$

特别当(bc)为第一类，第二类齐次边界条件或周期性边界条件时

$$< LX,X >_\rho = \int_a^b [k(X')^2+qX^2]dx.$$

对于第三类齐次边界条件

$$-kX'X|_a^b = k(a)X(a)X'(a) - k(b)X'(b)X(b) = -\frac{k(a)}{K(a)}X(a)^2 + \frac{K(b)}{K(b)}X(b)^2.$$

在热传导情形：$K(a) < 0, K(b) > 0$（由于边界处外法向的不同）。因此对于第一类、第二类齐次边界条件，周期性边界条件，或者是第三类齐次边界条件且$K(a) < 0, K(b) > 0$时，对于$X \neq 0$

$$< LX, X >_\rho \geq \int_a^b [k(X')^2 + qX^2]dx \geq 0.$$

而且$< LX, X >_\rho = 0$时必有$q \equiv 0, X' \equiv 0$，即$q \equiv 0, X \equiv C$。只能出现在两端都为第二类齐次边界条件或周期性边界条件情形（第三类齐次边界条件情形假设了$K(a) < 0, K(b) > 0$）。

与线性代数中对称阵的特征值和特征函数定义类似。定义

$$\lambda_1 = \inf_{X \neq 0, X \in L^2_{\rho,bc}[a,b]} \frac{< LX, X >_\rho}{< X, X >_\rho},$$

称为第一特征值。由变分原理取到最小值λ_1的$X \in L^2_{\rho,bc}[a,b]$必满足

$$LX = \lambda_1 X.$$

记

$$F_1 = \{X | LX = \lambda_1 X\},$$

称为第一特征函数空间。定义

$$\lambda_2 = \inf_{X \perp_\rho F_1} \frac{< LX, X >_\rho}{< X, X >_\rho},$$

称为第二特征值，$\lambda_2 > \lambda_1$。其中取到极小值λ_2的函数满足$LX = \lambda_2 X$，相应的有第二特征函数空间

$$F_2 = \{X \perp_\rho F_1 | LX = \lambda_2 X\}.$$

一般的，第n特征值和第n特征函数空间递归定义为

$$\lambda_n = \inf_{X \perp_\rho \{F_1, \cdots, F_{n-1}\}} \frac{< LX, X >_\rho}{< X, X >_\rho},$$

$$F_n = \{X \perp_\rho \{F_1, \cdots, F_{n-1}\} | LX = \lambda_n X\}.$$

由泛函分析（自共轭紧算子）一般理论，

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n \to +\infty,$$

并且特征函数F_n维数有限。特别由于$LX = \lambda_n X$，$dim(F_n) \le 2$。$dim(F_n) = 2$仅出现在周期性边界条件情形。并且固有函数系在$L^2_{\rho,bc}[a,b]$中是完备的，即：对任意$f \in L^2_{\rho,bc}[a,b]$，都有广义Fourier展开：当$dim(F_n) = 1$时

$$f(x) = \sum_{n=1} a_n X_n(x), \quad X_n \in F_n,$$

或当$dim(F_n) = 2$时

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n X_n + b_n Y_n), \quad X_n, Y_n \in F_n, X_n \perp_\rho Y_n.$$

并且，对于不同的特征函数$\lambda_m \ne \lambda_n$，$F_m \perp_\rho F_n$。事实上，由于L自共轭

$$< LX_m, X_n >_\rho = \lambda_m < X_m, X_n >_\rho = < LX_n, X_m >_\rho = \lambda_n < X_n, X_m >_\rho,$$

因此

$$< X_m, X_n >_\rho = 0.$$

对每一个F_n可以正交化，从而可以得到$L^2_{\rho,bc}[a,b]$的一组正交基。

取$L^2_{\rho,bc}[a,b]$的一组完备的正交基$\{X_n\}$，则展开式

$$f(x) = \sum_{n \ge 1} a_n X_n(x)$$

中，系数

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) X_n(x) \rho(x) dx}{\|X\|_\rho^2}.$$

该展开式称为f的广义Fourier展开，a_n称为f关于$\{X_n\}$的广义Fourier系数。

所以说，分离变量法是一种广义Fourier展开法。而Sturm-Liouville理论保证了求得的特征函数系的完备性，正交性（周期条件下需对每个特征函数空间进行正交化）。

【例1】解固有值问题：

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (-l, l) \\ y'(-l) = y'(l) = 0. \end{cases}$$

解：$k = 1, q = 0, \rho = 1$。边界条件为第二类齐次边界条件。因此$\lambda \ge 0$。对于零特征值，有特征函数$X = 1$。

设$\lambda = \mu^2 > 0, \mu > 0$，此时有通解

$$y(x) = a \cos \mu x + b \sin \mu x.$$

代入边界条件得

$$\begin{cases} a\sin\mu l + b\cos\mu l = 0 \\ -a\sin\mu l + b\cos\mu l = 0. \quad (1) \end{cases}$$

若有非零解(a,b)，则

$$\begin{vmatrix} \sin\mu l & \cos\mu l \\ -\sin\mu l & \cos\mu l \end{vmatrix} = \sin 2\mu l = 0,$$

因此

$$\mu_n = \frac{n\pi}{2l}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\lambda_n = \mu_n^2 = (\frac{n\pi}{2l})^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

以μ_n代入（1），有解

$$a = \cos\frac{n\pi}{2}, \quad b = \sin\frac{n\pi}{2},$$

因此得

$$y_n(x) = \cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2l} + \sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{2l} = \cos\frac{n\pi(x-l)}{2l}.$$

所以，固有值问题的解为

$$\lambda_n = \mu_n^2 = (\frac{n\pi}{2l})^2, \quad y_n(x) = \cos\frac{n\pi(x-l)}{2l}, \quad n \geq 0.$$

【例2】解固有值问题

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad x \in (1, e) \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

解：先化方程为SL型方程：

$$\rho x^2 y'' + x\rho y' + \lambda\rho y = (\rho x^2 y')' - (\rho x^2)y' + x\rho y' + \lambda\rho y,$$

要求

$$(\rho x^2)' - \rho x = 0,$$

从而

$$x^2\rho' + 2x\rho - x\rho = x^2\rho' + x\rho = 0,$$

$$x\rho' + \rho = (x\rho)' = 0.$$

令$\rho = \frac{1}{x}$，则有

$$\begin{cases} (xy')' + \lambda\frac{1}{x}y = 0, \quad x \in (1, e), \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

这里$k = x, q = 0, \rho = \frac{1}{x}$。因此$\lambda > 0$，$dim(F_n) = 1$。求Euler方程

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0$$

的通解。令$t = \ln x$，则方程化为

$$\ddot{y} + \lambda y = 0, \quad \lambda = \mu^2 > 0,$$

因此

$$y = a\cos\mu t + b\sin\mu t = a\cos(\mu\ln x) + b\sin(\mu\ln x).$$

由$y(1) = y(e) = 0$得

$$a = 0, \quad b\sin\mu = 0,$$

因此

$$\mu_n = n\pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

从而

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad y_n(x) = \sin(n\pi\ln x), \quad \rho = \frac{1}{x}.$$

特别，

$$\int_1^e y_n(x)y_m(x)\frac{1}{x}dx = \int_0^1 \sin(n\pi t)\sin(m\pi t)dt = 0.$$

作业：2.解固有值问题：

$$\begin{cases} y'' - 2ay' + \lambda y = 0, \quad x \in (0,1), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (r^2R')' + \lambda r^2 R = 0, \quad 0 < r < a, \\ |R(0)| < +\infty, \quad R(a) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{(4)} + \lambda y = 0, \quad x \in (0,l), \\ y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0. \end{cases}$$

§8.5 分离变量法求解偏微分方程：进一步例子

【例1】求解

$$\begin{cases} \triangle_2 u = 0, \quad 1 < r < e, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ u|_{r=1} = u|_{r=e} = 0, \\ u|_{\theta=0} = 0, \quad u|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = g(r). \end{cases}$$

解：对r解固有值问题。令$u = R(r)\Theta(\theta)$。由

$$\triangle_2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2,$$

可得

$$(R'' + \frac{1}{r}R')\Theta + \frac{R}{r^2}\Theta'' = 0,$$

即

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{\frac{1}{r^2}R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0.$$

因此，

$$\begin{cases} R'' + \frac{1}{r}R' + \frac{\lambda}{r^2}R = 0, \\ R(1) = R(e) = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$\Theta'' - \lambda\Theta = 0. \quad (2)$$

固有值问题（1）需要化为SL型：

$$rR'' + R' + \frac{\lambda}{r}R = 0,$$

$$(rR')' + \frac{\lambda}{r}R = 0.$$

即

$$k = r, \quad q = 0, \quad \rho = \frac{1}{r}.$$

求解欧拉方程

$$r^2R'' + rR' + \lambda R = 0,$$

令$t = \ln r$，则（1）转化为

$$\begin{cases} \ddot{R} + \lambda R = 0, \\ R(t=0) = R(t=1) = 0. \end{cases}$$

此固有值问题$\lambda > 0$（通过分部积分也可知），其解为

$$R_n(t) = \sin n\pi t, \quad \lambda_n = (n\pi)^2,$$

即

$$R_n(r) = \sin(n\pi \ln r), \quad \lambda_n = (n\pi)^2.$$

由

$$\Theta_n'' - \lambda_n^2 \Theta_n = 0,$$

可得

$$\Theta_n = A_n \cosh(n\pi\theta) + B_n \sinh(n\pi\theta).$$

令

$$u(r,\theta) = \sum_{n\geq 1} [A_n \cosh(n\pi\theta) + B_n \sinh(n\pi\theta)] \sin(n\pi \ln r).$$

由

$$u(r,0) = \sum_{n\geq 1} A_n \sin(n\pi \ln r) = 0,$$

可得$A_n = 0$。因此

$$\sum_{n\geq 1} B_n \sinh \frac{n\pi^2}{2} \sin(n\pi \ln r) = g(r),$$

$$B_n = \frac{\int_1^e g(r) \sin(n\pi \ln r) \frac{1}{r} dr}{\sinh(\frac{n\pi^2}{2}) \int_1^e \sin^2(n\pi \ln r) \frac{1}{r} dr}.$$

【例】求解三维静电场边值问题（出现多重Fourier级数）

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad x \in [0,a], y \in [0,b], z \in [0,c] \\ u(0,y,z) = u(a,y,z) = 0, \quad u(x,0,z) = u(x,b,z) = 0, \\ u(x,y,0) = 0, \quad u(x,y,c) = \varphi(x,y). \end{cases}$$

解：分离变量$u = X(x)Y(y)Z(z)$，代入方程得

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

因此三项都为常数，结合边界条件可得

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'' + \mu Y = 0, \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

$$Z'' - (\lambda + \mu) Z = 0.$$

解得

$$X_m(x)=\sin(\frac{m\pi x}{a}),\quad \lambda_m=(\frac{m\pi}{a})^2,\quad m\in\mathbb{N}$$

$$Y_n(y)=\sin(\frac{n\pi y}{b}),\quad \mu_n=(\frac{n\pi}{b})^2,\quad n\in\mathbb{N}$$

$$Z_{mn}(z)=a_{mn}\cosh(\nu_{mn}z)+b_{mn}\sinh(\nu_{mn}z),\quad \nu_{mn}=\sqrt{\lambda_m+\mu_n}.$$

因此，通解为

$$u=\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}Z_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

由$z=0$处边界条件得

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=0,$$

$$a_{mn}=0,\quad m\geq 1,n\geq 1.$$

由$z=c$处边界条件得

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}b_{mn}\sinh(\nu_{mn}c)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=\varphi(x,y).$$

$\{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\}_{m\geq 1,n\geq 1}$构成$L^2_{bc}([0,a]\times[0,b])$的正交基，因此

$$b_{mn}=\frac{1}{\sinh(\nu_{mn}c)}\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b\varphi(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy.$$

【例】求解

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\quad x\in[0,a],y\in[0,b],z\in[0,c]\\ u|_{x=0}=u_x|_{x=a}=0,\quad u_y|_{y=0}=u|_{y=b}=0,\\ u|_{z=0}=0,\quad u|_{z=c}=\varphi(x,y).\end{cases}$$

解：分离变量$u=X(x)Y(y)Z(z)$，代入方程得

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}=0.$$

因此三项都为常数，结合边界条件可得

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\ X(0)=X'(a)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}Y''+\mu Y=0,\\ Y'(0)=Y(b)=0\end{cases}$$

$$Z'' - (\lambda + \mu)Z = 0.$$

$\lambda > 0, \mu > 0$，解得

$$X_m(x) = \sin(\frac{(2m+1)\pi x}{2a}), \quad \lambda_m = (\frac{(2m+1)\pi}{2a})^2, \quad m \geq 0$$

$$Y_n(y) = \cos(\frac{(2n+1)\pi y}{2b}), \quad \mu_n = (\frac{(2n+1)\pi}{2b})^2, \quad n \geq 0$$

$$Z_{mn}(z) = a_{mn}\cosh(\nu_{mn}z) + b_{mn}\sinh(\nu_{mn}z), \quad \nu_{mn} = \sqrt{\lambda_m + \mu_n}.$$

因此，通解为

$$u = \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}[a_{mn}\cosh(\nu_{mn}z) + b_{mn}\sinh(\nu_{mn}z)]\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2b}.$$

由边界条件$u|_{z=0} = 0$得$a_{mn} = 0$。由$u|_{z=c} = \varphi(x,y)$得

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} b_{mn}\sinh(\nu_{mn}c)\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2b} = \varphi(x,y).$$

从而

$$b_{mn} = \frac{1}{\sinh(\nu_{mn}c)}\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \varphi(x,y)\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2b}dydx, \quad m,n \geq 0.$$

【例】求解二维双拉普拉斯方程所有分离变量形式的解

$$\begin{cases} \triangle^2 u = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})^2 u = 0, \quad 0 < x < l \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

解：令$u = X(x)Y(y)$，代入得

$$X^{(4)}Y + 2X''Y'' + XY^{(4)} = 0. \quad (1)$$

因此

$$\frac{X^{(4)}}{X} + 2\frac{X''}{X}\frac{Y''}{Y} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = 0.$$

对y求导得

$$2\frac{X''}{X}(\frac{Y''}{Y})' + (\frac{Y^{(4)}}{Y})' = 0.$$

因此

$$X'' = -\lambda X, \quad X^{(4)} = \lambda^2 X;$$

代入（1）得

$$Y^{(4)} - 2\lambda Y'' + \lambda^2 Y = 0. \quad (2)$$

由定解条件得

$$X(0) = X(l) = 0,$$

从而有固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

有解

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, \quad n \geq 1.$$

求解（2）

$$Y^{(4)} - 2(\frac{n\pi}{l})^2 Y'' + (\frac{n\pi}{l})^4 Y = 0. \quad (2)$$

其特征多项式有特征值$\pm\frac{n\pi}{l}$（分别两重），因此有通解

$$Y_n(y) = (A_n + B_n y) \cosh \frac{n\pi y}{l} + (C_n + D_n y) \sinh \frac{n\pi y}{l}.$$

所以原问题得分离变量形式的解为

$$[(A_n + B_n y) \cosh \frac{n\pi y}{l} + (C_n + D_n y) \sinh \frac{n\pi y}{l}] \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \geq 1.$$

§8.6 非齐次问题分离变量法求解

在之前的定解问题中，我们考虑齐次泛定方程和齐次边界条件。对于非齐次定解问题的求解，常用的方法包括：（1）对于非齐次泛定方程：固有函数法（Fourier方法），特解法；（2）非齐次边界条件：特解法。

【例】求解

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, 0 < x < l, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

解：令$u = v + w$，使得

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < l, \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, 0 < x < l, \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0, \\ w|_{t=0} = 0, \quad w_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

v的求解同之前用分离变量法求解。

求解$w(t,x)$：先考虑它对应的齐次问题

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad (1) \\ w(t,0) = w(t,l) = 0. \end{cases}$$

的固有值问题

$$\begin{cases} X'' = -\lambda X, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

求解它的固有值问题及固有函数，我们知道它的固有函数系构成L^2的完备正交基，由此也可求得w的齐次问题（1）的一族变量分离形式的特解。更关键的是$w(t,x)$（一般不是变量分离形式）可以展开成固有函数系的级数。因此由固有值问题的解

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

$w(t,x), f(t,x)$可展开为

$$w(t,x) = \sum_{n\geq 1} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$f(t,x)=\sum_{n\geq 1} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

由$w(t,x)$的泛定方程及初始条件得$T_n(t)$的初值问题

$$\begin{cases} T_n''=-a^2\lambda_n T_n+f_n, \\ T_n(0)=0, \quad T_n'(0)=0. \end{cases}$$

利用第六章知识求解$T_n(t)$，从而得到

$$u=v+w=v+\sum_{n\geq 1} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

【例】求解

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+f(t,x), \quad 0<x<l, \quad t>0 \\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0, \\ u|_{t=0}=0. \end{cases}$$

解：Fourier方法。由齐次泛定方程与边界条件对应的固有值问题

$$\begin{cases} X''=-\lambda X, \\ X(0)=X(l)=0. \end{cases}$$

可解得完备正交基$\{\sin\frac{n\pi x}{l}\}_{n\geq 1}$。令

$$f(t,x)=\sum_{n\geq 1} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

待定

$$u(t,x)=\sum_{n\geq 1} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

由方程和初始条件得

$$\begin{cases} T_n'=-a^2(\frac{n\pi}{l})^2T_n+f_n(t), \\ T_n(0)=0. \end{cases}$$

【例】求解Poisson方程边值问题

$$\begin{cases} \triangle_2 u=12(x^2-y^2), \quad a<r<b \\ u|_{r=a}=1, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{r=b}=0. \end{cases}$$

解法一（Fourier方法）：先分离变量法解对θ解固有值问题得到完备正交基，然后待定与r有关的系数求解。令$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，则

$$R''\Theta+\frac{1}{r}R'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0,$$

$$\frac{r^2(R''+\frac{1}{r}R')}{R}+\frac{\Theta''}{\Theta}=0,$$

因此可设存在常数λ使得

$$\frac{r^2(R''+\frac{1}{r}R')}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda.$$

由周期性条件$\Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta)$，于是$\Theta$构成固有值问题

$$\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0,\\ \Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta).\end{cases}$$

$\lambda\ge 0$，固有值问题的固有值及固有函数相应的为

$$\lambda_n=n^2,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$\Theta_n=A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta).$$

设

$$u(r,\theta)=A_0(r)+\sum_{n\ge 1}[A_n(r)\cos n\theta+B_n(r)\sin n\theta].$$

代入方程

$$\triangle_2 u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=12r^2\cos 2\theta,$$

可得$A_0(r),A_n(r),B_n(r)$分别满足的二阶常微分方程（Euler方程）。由边界条件得

$$A_0(a)=1,\quad A_n(a)=B_n(a)=0,\quad n\ge 1;$$

$$A_0'(b)=A_n'(b)=B_n'(b)=0,\quad n\ge 1.$$

除了$A_0(r)\equiv 1,A_2(r)=Cr^2+Dr^{-2}+r^4$，其余系数$A_n(r)\equiv 0,B_n(r)\equiv 0$。

由分部积分，方程的解唯一。

解法二（特解法）：令$v=x^4-y^4=r^4\cos 2\theta$，显然$\triangle v=12(x^2-y^2)$。令$u=v+w$，则$w$满足

$$\begin{cases}\triangle w=0,\\ w|_{r=a}=1-a^4\cos 2\theta,\quad w_r|_{r=b}=-4b^3\cos 2\theta.\end{cases}$$

二维拉普拉斯方程通解为

$$w = (a_0 + b_0 \ln r) + \sum_{n \geq 1} (a_n r^n + b_n r^{-n})(c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta).$$

代入边界条件确定系数及w。

之前的方程中边界固有值问题都可以根据分离变量法以及相应的齐次边界条件或周期性边界条件直接建立。

【例】求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = \sin bt, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

解：先找满足边界条件的特解。令

$$v(t,x) = \frac{x}{l} \sin bt,$$

$$u = v + w,$$

则w满足

$$\begin{cases} w_{tt} = u_{tt} - v_{tt} = a^2 w_{xx} + \frac{b^2}{l} x \sin bt, \quad 0 < x < l, t > 0, \\ w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0, \\ w|_{t=0} = \varphi(x), \quad w_t|_{t=0} = \psi(x) - \frac{b}{l} x. \end{cases}$$

然后可以用Fourier方法求解。

对于一般的三类非齐次边界条件

$$\begin{cases} (\alpha_1 v - \beta_1 v_x)_{x=a} = g_1(t), \\ (\alpha_2 v + \beta_2 v_x)_{x=b} = g_2(t) \end{cases}$$

的齐次化，可尝试用$v(t,x) = A(t)x + B(t)$，它需要满足

$$\begin{cases} (\alpha_1 a - \beta_1) A(t) + \alpha_1 B(t) = g_1(t), \\ (\alpha_2 b + \beta_2) A(t) + \alpha_2 B(t) = g_2(t) \end{cases}$$

若无解，尝试$v(t,x)$为x的二次函数。

作业：13（1），14（1）

§8.7 Legendre方程与幂级数解法

继续考虑三类方程的定解问题在三维欧氏空间中的球坐标或柱坐标下的分离变量法。此时固有值问题对应的是变系数线性常微分方程，其解为一些特殊函数。

三个典型方程：

$$u_{tt} = a^2 \triangle_3 u \quad (1)$$

$$u_t = a^2 \triangle_3 u, \quad (2)$$

$$\triangle_3 u = 0. \quad (3)$$

在（1）（2）中令$u(t,x,y,z) = T(t)v(x,y,z)$，则分离变量分别得到

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{\triangle_3 v}{v} = -K,$$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{\triangle_3 v}{v} = -K.$$

所以需要进一步求解Helmholtz方程

$$\triangle_3 v + Kv = 0.$$

对v的进一步变量分离依赖于坐标系的选取。有三类重要的正交坐标：直角坐标系，球坐标，柱坐标。当区域为长方体时，在直角坐标系下变量分离比较简单：$v = X(x)Y(y)Z(z)$，

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + K = 0,$$

$$X'' + \lambda X = 0, \cdots$$

其通解为三角函数、指数函数或一次多项式，具体的固有值及固有函数由边界条件确定。

对于球体或其一部分，采用球坐标(r,θ,φ)，其中$r = |x|, \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi]$

$$(x,y,z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\partial_y + \frac{\partial z}{\partial r}\partial_z = \sin\theta\cos\varphi\partial_x + \sin\theta\sin\varphi\partial_y + \cos\theta\partial_z,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi\partial_x + r\cos\theta\sin\varphi\partial_y - r\sin\theta\partial_z,$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\partial_x + r\sin\theta\cos\varphi\partial_y.$$

特别，$\{\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\}$两两正交。在球坐标下

$$\triangle_3=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

设$v=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，则Helmholtz方程化为

$$\frac{\triangle_3 v}{v}+K=\frac{\frac{1}{r^2}(r^2R)'}{R}+\frac{1}{r^2}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}]+K=0.$$

因此，Φ''/Φ为常数，因此化为求解

$$\begin{cases}\Phi''+\mu\Phi=0, \quad (a)\\ \frac{\frac{1}{r^2}(r^2R)'}{R}+\frac{1}{r^2}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta}-\frac{\mu}{\sin^2\theta}]+K=0.\end{cases}$$

同样

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta}-\frac{\mu}{\sin^2\theta}=-\lambda,$$

即

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta})\Theta=0. \quad (b)$$

从而

$$\frac{\frac{1}{r^2}(r^2R)'}{R}+\frac{-\lambda}{r^2}+K=0,$$

即

$$\frac{1}{r^2}(r^2R)'+(K-\frac{\lambda}{r^2})R=0. \quad (c)$$

(c)称为球Bessel方程。特别，当$K=0$时(c)可化为欧拉方程

$$r^2R''+2rR'-\lambda R=0.$$

对于(b)，作自变量代换$x=\cos\theta\in[-1,1]$，并记$y(x)=\Theta(\arccos x)=\Theta(\theta)$，则

$$\Theta'(\theta)=-y'(x)\sin\theta,$$

$$\Theta''(\theta)=y''(x)\sin^2\theta-y'\cos\theta,$$

因此(b)化为

$$y''(x)\sin^2\theta-y'\cos\theta+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(-y'\sin\theta)+(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta})y=0,$$

即

$$(1-x^2)y''-2xy'+(\lambda-\frac{\mu}{1-x^2})y=0.$$

它可化为SL型方程

$$[(1-x^2)y']' + (\lambda - \frac{\mu}{1-x^2})y = 0, \quad \text{(Legendre)}$$

其中$k = 1-x^2, q = \frac{\mu}{1-x^2}, \rho = 1$（此时$x = \pm 1$为$k$的1阶零点，为$q$的1阶极点，SL理论仍适用）。当$\mu = 0$时，

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad \text{(Legendre)}$$

称为Legendre方程。

【例】在半径为a的接地金属球壳内距离球心b的P点处有点电荷$4\pi\epsilon q$，求球内电位。

解：设球内电位为$U = u_0 + u$，其中u_0为点电荷产生的电位，u为金属球壳上因点电荷所产生的感应电荷所对应的电位。取P在z正半轴上，即$P = (0,0,b)$，则$u_0(Q) = \frac{q}{|Q-P|}$。u满足

$$\begin{cases} \triangle_3 u = 0, \\ u|_{r=a} = -u_0|_{r=a} = -\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}. \end{cases}$$

因$u(r,\theta,\varphi)$关于z轴旋转对称，u与φ无关。记为$u(r,\theta)$，此时

$$\triangle_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) = 0.$$

设$u = R(r)\Theta(\theta)$，则

$$\frac{(r^2R')'}{R} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta} = 0.$$

因此

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + \lambda\Theta = 0,$$
$$(r^2R')' - \lambda R = 0.$$

固有值问题为

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + \lambda\Theta = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \\ |\Theta(0)| < \infty, |\Theta(\pi)| < \infty. \end{cases}$$

令$x = \cos\theta \in [-1,1]$，$y(x) = \Theta(\arccos x) = \Theta(\theta)$，则它化为

$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1, \\ |y(\pm 1)| < \infty. \end{cases}$$

我们将用幂级数法求解Legendre方程，特别是上述固有值问题。幂级数法的理论基础是柯西利用优级数法建立的初值问题解析解（收敛的幂级数解）的存在性和唯一性定理，参见章节7.1。

Theorem 8.7.1. （柯西定理）如果$f(x,y)$在(x_0,y_0)解析，即在某矩形区域$|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b$上可以展成收敛幂级数

$$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j,$$

则初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

在x_0的某个邻域内有唯一的解析解，即唯一解$y=y(x)$可以展开成收敛幂级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n.$$

对于微分方程组

$$\frac{dy_k}{dx}=f_k(x,y_1,\cdots,y_n),\quad y_k(x_0)=y_k, k=1,\cdots,n,$$

其中f_k解析，柯西定理仍然成立，即存在唯一的解析解。通过把高阶方程转化为微分方程组，可以得到如下定理。

Theorem 8.7.2. 设方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

中$p(x),q(x)$在$|x-x_0|<r$上可以展成$(x-x_0)$的收敛幂级数，则方程在$|x-x_0|<r$上有收敛的幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n,$$

其中C_0,C_1是两个任意常数（可通过在x_0的初值条件来决定，即$C_0=y_0,C_1=y_0'$），而$C_n(n\ge 2)$可以由C_0,C_1递推确定。

由此，Legendre方程

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{\lambda}{1-x^2}y=0,\quad -1<x<1,$$

在$|x|<1$上有解析解。

设

$$y(x)=\sum_{n\ge 0}a_nx^n,$$

a_n为待定常数。则

$$(1-x^2)y''=\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_n(x^{n-2}-x^n)=\sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n\geq 0}n(n-1)a_nx^n,$$

$$-2xy'=-\sum_{n\geq 1}2na_nx^n=-\sum_{n\geq 0}2na_nx^n,$$

代入Legendre方程得

$$\sum_{n\geq 0}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-2na_n+\lambda a_n]x^n=0,$$

因此

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=[n(n+1)-\lambda]a_n.$$

接下来可以通过此递推公式确定a_n，求解Legendre方程的固有值问题

$$\begin{cases}[(1-x^2)y']'+\lambda y=0, & -1<x<1,\\ |y(\pm 1)|<\infty.\end{cases}$$

Sturm-Liouville定理中包含情形：当$x=a$(或$x=b$)是$k(x)$的至多一阶零点，是$q(x)$的至多一阶极点，且$|X(a)|<\infty$ (或$|X(b)|<\infty$)。此时同样有$\lambda\geq 0$。记$\lambda=l(l+1),l\geq 0$。

（1）当l不是整数时，可分别令$a_0\neq 0,a_1=0$以及$a_0=0,a_1\neq 0$得到线性无关的无穷幂级数解y_1,y_2，此时

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{n(n+1)-l(l+1)}{(n+1)(n+2)}\sim 1-\frac{2}{n},$$

y_1,y_2的收敛半径为1，且在$x=\pm 1$都发散。此时$l(l+1)$不是固有值。

（2）设l为整数，

$$a_{k+2}=\frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+1)(k+2)}a_k=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+1)(k+2)}a_k.$$

当$l=n$为偶数时，取$a_0\neq 0,a_1=0$，则

$$a_{l+2}=a_{l+4}=\cdots=0,$$

因此得到$y=P_n(x)$为n次多项式。令$a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$，则由

$$a_k=a_{k+2}\frac{(k+1)(k+2)}{(k-n)(k+n+1)},$$

可得

$$
\begin{aligned}
a_{n-2k} &= a_n \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)\cdots(n-1)n}{(-2k)(-2k+2)\cdots(-2)(2n-2k+1)\cdots(2n-1)} \\
&= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)\cdots(n-1)n(-1)^k}{2^k k!(2n-2k+1)\cdots(2n-1)} \\
&= \frac{(-1)^k}{2^n(k!)}\frac{(2n)!n!/(n-2k)!}{2^k(n!)^2(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)} \\
&= \frac{(-1)^k}{2^n(k!)}\frac{(2n)(2n-2)\cdots(2n-2k+2)(2n-2k)!}{2^k(n!)(n-2k)!} \\
&= \frac{(-1)^k}{2^n(k!)}\frac{2^k n!/(n-k)!(2n-2k)!}{2^k(n!)(n-2k)!} \\
&= \frac{(-1)^k}{2^n(k!)}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-2k)!},
\end{aligned}
$$

$$
P_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}.
$$

当$l=n$为奇数时，取$a_0=0, a_1\neq 0$，则

$$
a_{n+2} = a_{n+4} = \cdots = 0,
$$

因此得到$y=P_n(x)$为n次多项式，取$a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$，则$a_{n-2k}, P_n(x)$可类似求得。

综合可得，当$l=n$为整数时

$$
P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}.
$$

$P_n(x)$称为n阶Legendre多项式（第一类Legendre多项式）。特别，

$$
P_0(x) = 1,
$$

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1), \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x).
\end{aligned}
$$

一般的，$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$。

由Liouville公式，可解得Legendre方程

$$
y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0
$$

的另一个线性无关解（见(6.56)）

$$Q_n(x) = P(x)\int \frac{1}{P_n^2(x)} e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx} dx = P_n(x)\int \frac{1}{P_n(x)^2(1-x^2)} dx,$$

称为第二类Legendre函数。进一步计算可得

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - \sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)} P_{n-2k+1}(x).$$

可见，当$x \to \pm 1$时，$Q_n(x) \to \infty$。

当$l = 0, 1, 2, \cdots$，Legendre方程的通解为

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x).$$

综合可知，固有值问题的固有值为

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

相应的固有函数为$P_n(x)$，并且$\{P_n(x)\}$构成$L^2[-,1]$的完备正交基。

作业：7-2：3. 求解Hermite方程

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

其中λ为常数。

§8.8 球坐标下求拉普拉斯方程轴对称解

Legendre方程的固有值问题

$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, & -1 < x < 1, \\ |y(\pm 1)| < \infty. \end{cases}$$

固有值为

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

相应的固有函数为$P_n(x)$，并且$\{P_n(x)\}$构成$L^2[-,1]$的完备正交基。其中

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

$P_n(x)$称为n阶Legendre多项式。特别，

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

一般的，$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$。一般n次多项式$p_n(x)$ 可用Legendre多项式$\{P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)\}$展开。

Legendre多项式的微分表示（Rodrigues公式）：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n.$$

证明：由二项式公式得

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k},$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} (2n-2k)(2n-2k-1)\cdots(2n-2k-n+1) x^{n-2k} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \\ &= P_n(x). \end{aligned}$$

Legendre多项式的生成函数（母函数）：

$$G(x,t) := (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad t, x \in (-1,1).$$

证明：容易验证

$$(1-x^2)G_{xx} - 2xG_x + t^2G_{tt} + 2tG_t = 0.$$

记

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n,$$

代入上述方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(1-x^2)f_n'' - 2xf_n' + n(n+1)f_n]t^n = 0.$$

又有

$$f_n(\pm 1) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}G(\pm 1, t)|_{t=0}.$$

所以$f_n(x) = P_n(x)$。

Laplace方程在球坐标下的轴对称边值问题：设轴对称函数$u = u(r,\theta,\varphi) = u(r,\theta)$满足$\triangle_3 u = 0$，即

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) = 0. \quad (1)$$

令$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$，则分离变量得

$$\frac{r^2\triangle_3 u}{u} = \frac{(r^2R')'}{R} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta} = 0,$$

因此

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + \lambda\Theta = 0, \\ (r^2R')' - \lambda R = 0. \end{cases}$$

从而建立固有值问题

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + \lambda\Theta = 0, \quad \theta\in(0,\pi) \\ |\Theta(0)| < \infty, \quad |\Theta(\pi)| < \infty. \end{cases}$$

令$x = \cos\theta, y(x) = \Theta(\arccos x)$，则它等价于

$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1, \\ |y(\pm 1)| < \infty. \end{cases}$$

其解为

$$\begin{cases} \lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \\ X_n(x) = P_n(x). \end{cases}$$

即当$\lambda_n = n(n+1)$时，有相应固有函数

$$\Theta_n(\theta) = P_n(\cos\theta), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

对于λ_n求解相应的关于$R(r)$的方程（欧拉方程）

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$$

得到通解

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n-1}.$$

因此$\triangle_3 u = 0$的轴对称的通解（在球坐标下）为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n-1}) P_n(\cos\theta).$$

（首先利用固有函数系（Legendre多项式）的完备性可以由$P_n(\cos\theta)$展开，代入方程（1）并利用固有函数系的正交性，$R_n(r)$为如上形式。）

特别的，球内问题通解为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta),$$

球外问题通解为

$$u(r,\theta) = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta).$$

由通解确定系数需要利用固有函数系的正交性以及其范数。首先，

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + \lambda\Theta = 0$$

对应SL型方程

$$(\sin\theta\Theta')' + \lambda\sin\theta\Theta = 0,$$

即$k = \rho = \sin\theta, q = 0$。固有函数的正交性条件为

$$0 = \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \int_0^{\pi} P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \quad m \neq n.$$

设$f(x)\in L^2[-1,1]$有广义Fourier展开

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x),$$

则

$$c_n=\frac{1}{\|P_n(x)\|^2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx,\quad \|P_n(x)\|^2:=\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx.$$

$P_n(x)$的$L^2[-1,1]$范数$\|P_n(x)\|^2$可利用它的生成函数来求得：由生成函数定义，

$$(1-2xt+t^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}P_n(x)P_m(x)t^{n+m},\quad |t|<1,$$

因此由正交性

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dxt^{2n}.$$

另一方面可直接计算积分

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2xt+t^2} &= -\frac{1}{2t}\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\ln(1-2xt+t^2)dx\\ &= -\frac{1}{2t}\ln\frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}=\frac{1}{t}[\ln(1+t)-\ln(1-t)]\\ &= \frac{1}{t}[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}t^k-\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{1}{k}t^k]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{t}\frac{2}{2n+1}t^{2n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n}.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\int_0^{\pi}P_n^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{2}{2n+1}.$$

【例1】在半径为a的接地金属球壳内距离球心b的P点处有点电荷$4\pi\epsilon q$，求球内电位。

解：设球内电位为$U=u_0+u$，其中u_0为点电荷产生的电位，u为金属球壳上因点电荷所产生的感应电荷所对应的电位。取P在z正半轴上，即$P=(0,0,b)$，则$u_0(Q)=\frac{q}{|Q-P|}$。u满足

$$\begin{cases}\triangle_3u=0,\\ u|_{r=a}=-u_0|_{r=a}=-\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}.\end{cases}$$

由固有值问题的解及通解的表达式，设

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\frac{r}{a})^nP_n(\cos\theta),$$

代入边界条件，并利用生成函数

$$G(x,t):=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

得

$$\begin{aligned}u|_{r=a} &= \sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(\cos\theta)\\ &= -u_0|_{r=a}=-\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}=-\frac{q}{a}(1-2\frac{b}{a}\cos\theta+(\frac{b}{a})^2)^{-\frac{1}{2}}\\ &= -\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)(\frac{b}{a})^n\end{aligned}$$

因此

$$A_n=-\frac{q}{a}(\frac{b}{a})^n,$$

$$\begin{aligned}u &= -\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{rb}{a^2})^nP_n(\cos\theta)\\ &= -\frac{q}{a}(1-2\frac{br}{a^2}\cos\theta+(\frac{br}{a^2})^2)^{-\frac{1}{2}}\\ &= -\frac{aq}{b}[(\frac{a^2}{b})^2-2\frac{a^2}{b}r\cos\theta+r^2]^{-\frac{1}{2}}\\ &:= \frac{q'}{\rho'},\end{aligned}$$

其中

$$q'=-\frac{aq}{b},\quad \rho'=[(\frac{a^2}{b})^2-2\frac{a^2}{b}r\cos\theta+r^2]^{\frac{1}{2}}.$$

即感应电荷等效于在P关于球面的对称点位置$(0,0,\frac{a^2}{b})$处放置$(-4\pi\epsilon\frac{aq}{b})$的虚设电荷产生的电场。所求电位

$$U=\frac{q}{\rho}+\frac{q'}{\rho'}.$$

【例2】设半球球面保持稳定温度u_0（常数），底面保持零度，求半球内温度分布。

解：设温度为u，u轴对称，满足

$$\begin{cases} \triangle u = 0, \quad \theta \in [0,\pi), r < a, \\ u|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \\ u|_{r=a} = u_0. \end{cases}$$

考虑分离变量：$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$，可得到固有值问题

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + \lambda\Theta = 0, \quad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}, \\ |\Theta(0)| < \infty, \quad \Theta(\frac{\pi}{2}) = 0, \end{cases}$$

当且仅当$\lambda = n(n+1), n = 0,1,2,\cdots$时有在$\theta = 0$处有界的解$\Theta_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$。另外由$\Theta(\frac{\pi}{2}) = P_n(x=0) = 0$可得$n$为奇数。因此固有值问题的解为

$$\begin{cases} \lambda_n = (2n+1)(2n+2), \quad n = 0,1,2,\cdots, \\ \Theta_n(\theta) = P_{2n+1}(\cos\theta). \end{cases}$$

令

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\frac{r}{a})^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta),$$

代入

$$u|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_{2n+1}(\cos\theta) = u_0,$$

可得

$$A_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2n+1}^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta = u_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2n+1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = u_0 \int_0^1 P_{2n+1}(x)dx,$$

又由

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \int_0^{\pi} P_n^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1}.$$

因此

$$A_n = (4n+3)u_0 \int_0^1 P_{2n+1}(x)dx,$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)u_0 \int_0^1 P_{2n+1}(x)dx(\frac{r}{a})^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta).$$

注：球坐标下三维Laplace方程$\triangle_3 u = 0$的通解为

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)})P_n^m(\cos\theta)(C_{nm}\cos m\varphi + D_{nm}\sin m\varphi),$$

其中P_n^m为$m(\leq n)$阶Legendre方程固有值问题的固有函数（转化为Legendre方程求得）。

注: Helmholtz方程在柱坐标下的分离变量: 取柱坐标(r,θ,z)，其中$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$。则

$$\triangle_3=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

令$v(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$，代入Helmholtz方程得

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}+\frac{Z''}{Z}+K=0.$$

因此有

$$\begin{cases} Z''+\mu Z=0, \\ \Theta''+\sigma\Theta=0, \\ \frac{1}{r}(rR')'+(K-\mu-\frac{\sigma}{r^2})R=0. \end{cases}$$

记$\lambda=K-\mu,\sigma=\nu^2$，则

$$(rR')'+(\lambda r-\frac{\nu^2}{r})R=0,$$

它是SL型的，$k=r,q=\frac{\nu^2}{r},\rho=r$。

当$\lambda>0$时作自变量代换$x=\sqrt{\lambda}r$，并记$y(x)=R(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})=R(r)$，则

$$R'(r)=\sqrt{\lambda}y'(x),\quad R''(r)=\lambda y''(x),$$

代入得

$$r\lambda y''+\sqrt{\lambda}y'+(\lambda r-\frac{\nu^2}{r})R=0,$$

乘以r得

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,\quad \text{(Bessel)}$$

称为ν阶Bessel方程。ν阶Bessel方程以及相应固有值问题的求解需要用到广义幂级数法。

作业：求解

$$(1)\quad \begin{cases} \triangle_3 u=0, \quad r<a, \\ u|_{r=a}=\cos^2\theta. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \triangle_3 u=0, \quad r>1, \\ u|_{r=1}=\cos^2\theta, \\ u|_{r=\infty}=0. \end{cases}$$

第九章　线性偏微分方程

教材：[Evans, Partial differential Equations, **Second Edition**]

参考书：[陈祖墀，偏微分方程，第二版]

§9.1　拉普拉斯方程

设$U \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$为一开集。

Definition 9.1.1. 如果$u \in C^2(U)$并满足$Laplace$方程$\triangle u = 0$，则称它为调和函数。

调和函数是一类常见函数，与很多领域有密切关联，并具有许多重要特征，其中许多特征和证明方法可以推广。

回顾散度定理

Theorem 9.1.2. *(divergence theorem) Assume $U \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain. Then*

$$\int_U div(X)dx = \int_{\partial U} < X, \nu > dS,$$

where ν is the unit exterior normal of ∂U.

§9.1.1　平均值公式及应用

Theorem 9.1.3. 设$u \in C^2(U)$为调和函数，则对于任意$B_r(x) \subset U$成立

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y = \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u(y)dy.$$

证明：先证明球面平均情形：任取$x \in U$，不同的半径r的球面$\partial B_r(x)$上的积分可通过坐标变换都换到单位球面上积分，只有函数取值处依赖于r，从而方便求导。令$z = \frac{y-x}{r}$，则$y = x + rz, dS_y = r^{n-1}dS_z$，从而

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dr}[\frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y] = \frac{d}{dr}[\int_{\partial B_1(0)} u(x+rz)dS_z] \\
= & \int_{\partial B_1(0)} Du(x+rz)\cdot z dS_z \\
= & \int_{\partial B_r(x)} Du(y)\cdot\frac{y-x}{r}r^{1-n}dS_y = r^{1-n}\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)dS_y \\
= & r^{1-n}\int_{B_r(x)} \triangle u(y)dy = 0.
\end{aligned}$$

注：事实上，可以从更一般的求导法则直接得到如下等式

$$\frac{d}{dr}[\frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y] = r^{1-n}\int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)dS_y.$$

因此球面平均为常数（只依赖于x），从而

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y = \lim_{r\to 0}\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y = u(x).$$

上述球面平均值公式的两边同乘以r^{n-1}，并对r积分可得

$$\frac{1}{n}R^n u(x) = \frac{1}{n\omega_n}\int_0^R\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y dr,$$

因此

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^n}\int_{B_R(x)} u(y)dy.$$

而且对球体平均值公式求导也容易得到球面平均值公式，所以它们是等价的。 □

反过来，如果一个C^2函数满足上述（球面或球体）平均值公式，则它必调和。

Theorem 9.1.4. *设$u \in C^2(U)$，并且满足平均值公式，即对任意$B_r(x) \subset U$成立*

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y,$$

则u为调和函数。

证明：否则，不妨设$\triangle u > 0$在$B_r(x) \subset U$上成立。另一方面，在之前证明中已知

$$\frac{d}{dr}[\frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y] = r^{1-n}\int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)dS_y = r^{1-n}\int_{B_r(x)} \triangle u(y)dy > 0.$$

这与上式左端为零矛盾。 □

强极值原理：设$U \subset \mathbb{R}^n$为有界**连通**开集。我们将证明一个非常值的调和函数只能在边界上取到最大值。

Theorem 9.1.5. *设$u \in C^2(U)\cap C(\overline{U})$为调和函数，即$\triangle u = 0$ in U。则*

（1）$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$。

（2）若存在$x_0 \in U$使得$u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$，则$u$为常值函数。

证明：设存在一点$x_0\in U$使得$u(x_0)=M:=\max_{\overline{U}}u$。则对于$0<r<dist(x_0,\partial U)$，

$$M=u(x_0)=\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)}udy\le M.$$

等号成立当且仅当$u\equiv M$ within $B_r(x_0)$。由U的连通性，$\{x\in\overline{U}|u(x)=M\}=\overline{U}$。

或者更一般的方法，考虑$u_\epsilon:=u+\epsilon|x|^2,\epsilon>0$，则$\triangle u_\epsilon=2n\epsilon$，从而$u_\epsilon$只能在边界取到。令$\epsilon\to 0$，由$\partial U$为闭集紧致，得到（1）。 □

（1）称为极大值原理，（2）称为强极大值原理。定理中最大换成最小，相应结论同样成立。

应用：（1）调和函数可由边值的符号得到内部的符号。设$u\in C^2(U)\cap C(\overline{U})$，为如下拉普拉斯方程边值问题的解

$$\begin{cases}\triangle u=0, & \text{in } U\\ u=g\ge 0, & \text{on } \partial U,\end{cases}$$

则$u\ge 0$；并且如果g不恒为零，则$u>0$ in U。

（2）Possion方程第一边值问题解的唯一性。

Theorem 9.1.6. *设$g\in C(\partial U),f\in C(U)$。则如下Poission方程第一边值问题至多有一个解$u\in C^2(U)\cap C(\overline{U})$*

$$\begin{cases}-\triangle u=f, & in\ U\\ u=g, & on\ \partial U,\end{cases}$$

证明：否则设u_1,u_2为两个不同的解，则u_1-u_2为调和函数，边值为零，从而$u_1-u_2\equiv 0$。 □

注：无界区域上上述问题解未必唯一，例如$U=\{|x|\ge 1\}\subset\mathbb{R}^n,n\ge 3$，此时有零边值有界调和函数

$$u=|x|^{2-n}-1.$$

§9.1.2 调和函数的正则性

为证明调和函数光滑，我们需要引入函数的卷积与磨光。通常可以取一个光滑并具有紧支集的旋转对称函数作为磨光核。先介绍一个标准的磨光核。

Definition 9.1.7 (磨光核). *(i) 定义光滑函数*

$$\eta(x):=\begin{cases}C\exp(\frac{1}{|x|^2-1}), & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1,\end{cases}$$

其中$C>0$使得$\int_{\mathbb{R}^n}\eta dx=1$。

*(ii)*对于$\epsilon>0$，令

$$\eta_\epsilon(x):=\frac{1}{\epsilon^n}\eta(\frac{x}{\epsilon}).$$

称η,η_ϵ为磨光核。磨光核η_ϵ光滑并满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\epsilon dx=1,\quad spt(\eta_\epsilon)=B_\epsilon(0).$$

定义

$$U_\epsilon:=\{x\in U|dist(x,\partial U)>\epsilon\}.$$

Definition 9.1.8 (磨光函数). 设$u\in C(U)$，定义它的磨光函数为

$$u^\epsilon(x):=(\eta_\epsilon*u)(x)\quad x\in U_\epsilon.$$

即对$x\in U_\epsilon$定义

$$u^\epsilon(x)=\int_U\eta_\epsilon(x-y)u(y)dy=\int_U\eta(z)u(x-z)dz=(u*\eta_\epsilon)(x).$$

$u^\epsilon(x)$是$u(y)$在$B_\epsilon(x)$上利用$\eta_\epsilon(x-y)$的加权平均。

Theorem 9.1.9 (磨光性质). 设$u\in C(U)$，则$u^\epsilon\in C^\infty(U_\epsilon)$，并且

$$D^\alpha u^\epsilon(x)=\int_U D_x^\alpha\eta_\epsilon(x-y)u(y)dy,\quad x\in U_\epsilon.$$

证明：主要问题是求导与积分何时可交换次序。直接利用导数定义验证：$x\in U_\epsilon$，$|h|$充分小使得$x+he_i\in U_\epsilon$，因此由

$$u^\epsilon(x)=\int_U\eta_\epsilon(x-y)u(y)dy$$

得

$$\frac{u^\epsilon(x+he_i)-u^\epsilon(x)}{h}=\frac{1}{\epsilon^n}\int_U\frac{1}{h}[\eta(\frac{x+he_i-y}{\epsilon})-\eta(\frac{x-y}{\epsilon})]u(y)dy.\quad(1)$$

首先，对所有充分小的$|h|$，$u(y)$的积分区域可限制在U的一个紧子集V上。我们希望验证右边$h\to0$时极限存在，这只需$h\to0$时右边被积函数关于y的一致收敛性。因为$\eta\in C^\infty(\overline{B}_1)$，因此有一致收敛（下式两边之差为$O(h)$）

$$\frac{1}{h}[\eta(\frac{x+he_i-y}{\epsilon})-\eta(\frac{x-y}{\epsilon})]\rightrightarrows\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}(\frac{x-y}{\epsilon}),\quad \text{as}\quad h\to0\quad \text{for}\quad y\in U.$$

注意到$\eta_\epsilon(x-y)=\frac{1}{\epsilon^n}\eta(\frac{x-y}{\epsilon})$，

$$\frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial x_i}(x-y)=\frac{1}{\epsilon^n}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}(\frac{x-y}{\epsilon})\frac{1}{\epsilon},$$

(1)中右边对$h\to 0$取极限

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_i}(x)=\int_U\frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial x_i}(x-y)u(y)dy,\quad x\in U_\epsilon.$$

继续此求导步骤，即递归(将上式右边η_ϵ替换为$\partial_i\eta_\epsilon$等)，有

$$\partial^\alpha u^\epsilon(x)=\int_U\partial_x^\alpha\eta_\epsilon(x-y)u(y)dy,\quad x\in U_\epsilon.$$

□

Theorem 9.1.10. 设$u\in C(U)$满足平均值公式

$$u(x)=\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)}u(y)dS_y,\quad \forall B_r(x)\subset U,$$

则$u\in C^\infty(U)$。

证明：首先$u^\epsilon=\eta_\epsilon * u\in C^\infty(U_\epsilon)$。我们利用平均值公式验证$u\equiv u^\epsilon$ in U_ϵ：设$x\in U_\epsilon$，利用平均值公式可得（其中$r=|y-x|$）

$$\begin{aligned}
u^\epsilon(x) &= \int_U\eta_\epsilon(x-y)u(y)dy\\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\int_{B_\epsilon(x)}\eta(\frac{x-y}{\epsilon})u(y)dy\\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon\eta(\frac{r}{\epsilon})\int_{\partial B_r(x)}u(y)dS_y dr\\
&= \frac{1}{\epsilon^n}u(x)\int_0^\epsilon\eta(\frac{r}{\epsilon})n\omega_n r^{n-1}dr\\
&= u(x)\int_{B_\epsilon(0)}\eta_\epsilon(y)dy=u(x).
\end{aligned}$$

于是$u\equiv u^\epsilon\in C^\infty(U_\epsilon)$。由$\epsilon>0$任意，$u\in C^\infty(U)$。 □

所以u为调和函数当且仅当为$u\in C(U)$，且满足平均值公式。

作业：2，4，5，6

调和函数的导数估计（局部）：

Theorem 9.1.11. 设$u\in C(U)$为调和函数，$B_r(x_0)\subset U, |\alpha|=k$，则

$$|D^\alpha u(x_0)|\le \frac{C_k}{r^{n+k}}\|u\|_{L^1(B_r(x_0))}=\frac{C_k}{r^{n+k}}\int_{B_r(x_0)}|u(y)|dy,$$

其中

$$C_0=\frac{1}{\omega_n};\quad C_k=\frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n}, k\ge 1.$$

证明：$k=0$时直接由（球体）平均值公式得到。

对于$k=1$，u_i调和，由平均值公式及散度定理

$$\begin{aligned}|u_i(x_0)| &= \frac{1}{|B_{r/2}|}|\int_{B_{r/2}(x_0)}u_i(x)dx|=\frac{1}{|B_{r/2}|}|\int_{B_{r/2}(x_0)}div(ue_i)dx|\\ &= \frac{1}{|B_{r/2}|}|\int_{\partial B_{r/2}(x_0)}u<e_i,\nu>dS|\\ &\le \frac{2n}{r}\|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))}.\end{aligned}$$

对于$x\in\partial B_{r/2}(x_0)$，$B_{r/2}(x)\subset B_r(x_0)\subset U$，因此由$k=0$情形

$$|u(x)|\le\frac{1}{\omega_n}(\frac{2}{r})^n\|u\|_{L^1(B_{r/2}(x))}\le\frac{1}{\omega_n}(\frac{2}{r})^n\|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

从而，

$$|u_i(x_0)|\le\frac{2^{n+1}n}{\omega_n r^{n+1}}\|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

【对于$k\ge 2$，设对于$|\alpha|\le k-1$局部导数估计成立。考虑$D^\alpha u=(D^\beta u)_i$，其中$|\alpha|=|\beta|+1$。则类似$k=1$中证明可得

$$|D^\alpha u(x_0)|\le\frac{nk}{r}\|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B_{r/k}(x_0))}.$$

对于$x\in\partial B_{r/k}(x_0)$，$B_{\frac{k-1}{k}r}(x)\subset B_r(x_0)\subset U$，因此由$k-1$情形可得

$$|D^\beta u(x)|\le\frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\omega_n(\frac{k-1}{k}r)^{n+k-1}}\|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

从而，

$$|D^\alpha u(x_0)|\le\frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n r^{n+k}}\|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

】 □

调和函数的局部导数估计可用来证明调和函数的解析性，即证明其Taylor展开收敛到调和函数本身。

Theorem 9.1.12. 设$u \in C(U)$为调和函数，则u在U上解析。

上述局部导数估计对于全空间$\mathbb{R}^n$上定义的有界调和函数特别有用。

Theorem 9.1.13. *(Liouville)* 设$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$为有界调和函数，则$u$为常值函数。

证明：任意$x_0 \in \mathbb{R}^n$，应用梯度估计于$B_r(x_0)$得

$$|Du(x_0)| \leq \frac{\sqrt{n}C_1}{r^{n+1}}\|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \leq \frac{\sqrt{n}C_1\omega_n}{r}\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))}.$$

令$r \to \infty$，可见$Du \equiv 0$，从而u为常值函数。 □

注：上述Liouville定理也可以直接通过球体平均值公式（足够大的两个球体）来证明。Liouville定理看可以用来证明代数学基本定理。

Harnack不等式： 如果$\overline{V} \subset U$并且$\overline{V}$为紧致集，则称V紧包含于U，记作$V \Subset U$。

Theorem 9.1.14. *(Harnack inequality)* 设$u \geq 0$为U上的任意调和函数，则对任意连通$V \Subset U$，存在常数$C := C(V)$使得

$$\sup_V u \leq C \inf_V u.$$

证明：取$4r = dist(V, \partial U)$。设$x, y \in V, |x-y| \leq r$。则

$$u(x) \;=\; \frac{1}{|B_{2r}|}\int_{B_{2r}(x)} u(z)dz \geq \frac{1}{|B_{2r}|}\int_{B_r(y)} u(z)dz = \frac{1}{2^n}u(y).$$

所以，

$$2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n}u(y), \quad \forall x, y \in V, |x-y| \leq r.$$

由于V连通，$\overline{V}$紧致，可以取$\overline{V}$的有限开覆盖$\{B_k\}_{k=1}^N$，半径都为$r/2$，并且$B_k \cap B_{k+1} \neq \emptyset, k = 1, 2, \cdots, N-1$。从而

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{nN}}u(y), \quad \forall x, y \in V.$$

□

§9.1.3 基本解

考虑$\triangle u = 0$的旋转不变的解，即$u = v(r)$，其中$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$。对于$x \neq 0$，

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r},$$

$$u_i = v'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r},$$

$$u_{ii} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}),$$

因此

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} u_{ii} = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r).$$

求解

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

当$v' \neq 0$，则

$$[\log|v'|]' = \frac{1-n}{r},$$

因此通解为

$$v'(r) = \frac{C}{r^{n-1}}.$$

因此在$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$上，$\triangle_n u = 0$的旋转对称的解为

$$v(r) = \begin{cases} a\log r + b, & n = 2, \\ ar^{2-n} + b, & n \geq 3. \end{cases}$$

Definition 9.1.15. 拉普拉斯方程的基本解：

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x|, & n = 2,, \quad |x| > 0 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n}|x|^{2-n}, & n \geq 3, \quad |x| > 0 \end{cases}$$

其中ω_n为$\mathbb{R}^n$中单位球的体积。

注：基本解是$\mathbb{R}^n - \{0\}$上的调和函数，但不是全空间上的调和函数。事实上，

$$-\triangle\Phi(x) = \delta_0(x),$$

其中δ_0为Dirac函数（广义函数）。$\delta_0(x)$表示原点处单位质量（电荷）点源对应的密度分布，$\Phi(x)$是相应的位势函数。所以$\Phi(x)$的系数选取使得

$$\int_{\partial B_r(0)} D\Phi \cdot \nu dS = \int_{\partial B_r(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial r} dS = -1.$$

因为

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r},$$

$$u_i = v'(r)\frac{x_i}{r},$$

$$u_{ij} = v''(r)\frac{x_i x_j}{r^2} + v'(r)(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3}),$$

所以存在$C > 0$使得

$$|\Phi_i(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad |\Phi_{ij}(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}.$$

通过基本解Φ，可以利用函数卷积来得到Possion方程的解。首先注意到

$$x \mapsto \Phi(x-y)f(y), \quad y \neq x$$

关于x是调和的。定义Φ与f的卷积：

$$u(x) := (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \log(|x-y|)f(y)dy, & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}dy, & n \geq 3. \end{cases} \tag{8}$$

注意在$y = x$附近，上述积分也有意义。但由于$\Phi(x-y)$在$y = x$处的奇异性，不能直接交换求导与积分。

Theorem 9.1.16. *设u如上定义，$f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$。则*

（1）$u \in C^2(\mathbb{R}^n)$;

（2）$-\triangle u = f \ in \ \mathbb{R}^n$.

证明：（1）首先

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)dy,$$

因此

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)[\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}]dy, \quad h \neq 0.$$

由于有一致收敛

$$\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \rightrightarrows f_i(x-y),$$

从而令$h \to 0$得

$$u_i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f_i(x-y)dy.$$

类似可得
$$u_{ij}(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)f_{ij}(x-y)dy.$$
上式右边关于x连续，因此$u\in C^2(\mathbb{R}^n)$。

（2）由（1）中证明可知
$$\begin{aligned}\triangle u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)\triangle_x f(x-y)dy\\ &= \int_{B_\epsilon(0)}\Phi(y)\triangle_x f(x-y)dy+\int_{\mathbb{R}^n-B_\epsilon(0)}\Phi(y)\triangle_x f(x-y)dy\\ &:= I_\epsilon+J_\epsilon,\end{aligned}$$
其中$\epsilon\in(0,1)$。我们接下来计算$\epsilon\to 0$时，I_ϵ, J_ϵ的极限。

可计算
$$|I_\epsilon|\leq C\|D^2f\|_{L^\infty}\int_{B_\epsilon(0)}|\Phi(y)|dy\leq\begin{cases}C\epsilon^2|\log\epsilon|, n=2\\ C\epsilon^2, n\geq 3.\end{cases}$$

对于J_ϵ，我们希望分部积分，所以注意到$\triangle_x f(x-y)=\triangle_y f(x-y)$。利用分部积分可得
$$\begin{aligned}J_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^n-B_\epsilon(0)}\Phi(y)\triangle_y f(x-y)dy\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n-B_\epsilon(0)}D\Phi(y)\cdot D_y f(x-y)dy+\int_{\partial B_\epsilon(0)}\Phi(y)\frac{\partial f}{\partial\nu}(x-y)dS_y\\ &:= K_\epsilon+L_\epsilon,\end{aligned}$$
其中ν为$\partial B_\epsilon(0)$的内法向。这里
$$|L_\epsilon|\leq\|Df\|_{L^\infty}\int_{\partial B_\epsilon(0)}|\Phi(y)|dS_y\leq\begin{cases}C\epsilon|\log\epsilon|, n=2\\ C\epsilon, n\geq 3.\end{cases}$$

对于K_ϵ，继续分部积分得
$$\begin{aligned}K_\epsilon &= -\int_{\mathbb{R}^n-B_\epsilon(0)}D\Phi(y)\cdot D_y f(x-y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n-B_\epsilon(0)}\triangle\Phi(y)f(x-y)dy-\int_{\partial B_\epsilon(0)}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)f(x-y)dS_y\\ &= -\int_{\partial B_\epsilon(0)}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)f(x-y)dS_y.\end{aligned}$$

其中ν为$\partial B_\epsilon(0)$的内法向，因此这里

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)=\frac{1}{n\omega_n}\epsilon^{1-n}.$$

从而由$n\omega_n\epsilon^{n-1}$为$\partial B_\epsilon(0)$的面积，

$$\begin{aligned}K_\epsilon &= -\int_{\partial B_\epsilon(0)}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)f(x-y)dS_y\\ &= -\frac{1}{n\omega_n\epsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\epsilon(0)}f(x-y)dS_y\to -f(x),\quad \epsilon\to 0.\end{aligned}$$

综合之前的三部分估计，

$$-\triangle u(x)=f(x).$$

□

Theorem 9.1.17. 定理：设$f\in C_0^2(\mathbb{R}^n),n\geq 3$。则$-\triangle u=f$的所有有界解为

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)dy+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

证明：首先因为$|x|\to\infty$时，$\Phi(x)\to 0$，因此$\widetilde{u}:=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)dy$ 确实是Poisson方程的有界解。另外，如果u是另一个有界解，则$w:=u-\widetilde{u}$为有界调和函数，从而为常值函数。 □

$n=2$时，$\Phi(x)=-\frac{1}{2\pi}\ln|x|$，$\int_{\mathbb{R}^2}\Phi(x-y)f(y)dy$未必有界。

§9.1.4 Green函数

设$U \subset \mathbb{R}^n$为有界开集，边界$\partial U \in C^1$。我们将求解$u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$满足

$$\begin{cases} -\triangle u = f, & \text{in } U, \\ u = g, & \text{on } \partial U. \end{cases}$$

对于$n=2$时，我们通过分离变量得到该问题的Poisson积分公式。现在将对更一般情形引入Green函数，讨论求解。

设$u, v \in C^2(\overline{U})$。回顾Green第一公式

$$\int_U div(vDu)dx = \int_U (v\triangle u + Du \cdot Dv)dx = \int_{\partial U} v\frac{\partial u}{\partial \nu}dS$$

和Green第二公式

$$\int_U (v\triangle u - u\triangle v)dx = \int_{\partial U} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})dS.$$

根据之前求解Poisson方程的例子，固定$x \in U$，对于Green第二公式中v，将先尝试取它为拉普拉斯方程的基本解$v(y) = \Phi(x,y)$。定义

$$n=2: \quad \Phi(x,y) := \Phi(x-y) = \Phi(|x-y|) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|,$$

$$n \geq 3: \quad \Phi(x,y) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}|x-y|^{2-n}, \quad |\omega_n| = |B_1|.$$

$$-\triangle_x \Phi(x-y) = \delta_y(x),$$

特别$\Phi(x,y)$可看作x（或y）处单位点源在y（或x）处对应的位势。

设$u \in C^2(\overline{U})$，选定$x \in U$，以$v(y) = \Phi(x,y)$ 代入Green第二公式（为避开Φ的奇异，此时区域选取为$U \setminus \overline{B}_\rho(y)$）可得

$$\begin{aligned} \int_{U\setminus \overline{B}_\rho(x)} \Phi(x,y)\triangle u(y)dy &= \int_{\partial U}[\Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu}]dS_y \\ &\quad + \int_{\partial B_\rho(x)}[\Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu}]dS_y. \end{aligned}$$

令$\rho \to 0$:（1）因$\triangle u$有界，$\Phi(x,y)$可积，因此

$$\int_{U\setminus \overline{B}_\rho(x)} \Phi(x,y)\triangle u(y)dx \to \int_U \Phi(x,y)\triangle u(y)dy$$

（2）

$$\int_{\partial B_\rho(x)} \Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu} dS_y = -\Phi(\rho)\int_{\partial B_\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial \rho} dS_y = -\Phi(\rho)\int_{B_\rho(x)} \triangle u dy \to 0$$

（3）

$$\int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu} dS_y = -\Phi'(\rho)\int_{\partial B_\rho(x)} u(y) dS_y \to u(x).$$

因此有u的Green表示公式

$$u(x) = -\int_U \Phi(x,y)\triangle u(y)dy + \int_{\partial U} [\Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu}] dS_y, \quad x \in U.$$

注：如果u在U内调和，就得到调和函数的Green表示公式

$$u(x) = \int_{\partial U} [\Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu}] dS_y, \quad x \in U.$$

对于Dirichlet边值问题，Green表示公式

$$u(x) = -\int_U \Phi(x,y)\triangle u(y)dy + \int_{\partial U} [\Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu}] dS_y, \quad x \in U$$

中仍含有未知项$\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)$。我们通过引入一个新的函数$\phi^x(y)$消去该未知项：将$x \in U$看作参数，设$\phi^x(y)$关于$y$属于$C^2(\overline{U})$，满足

$$\begin{cases} \triangle_y \phi^x(y) = 0, \quad y \in U \\ \phi^x(y)|_{y\in\partial U} = \Phi(x,y). \end{cases}$$

对$u, \phi^x(y)$应用Green第二公式

$$\int_U (v\triangle u - u\triangle v) = \int_{\partial U} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}) dS$$

我们有

$$\int_U \phi^x(y)\triangle u(y)dy = \int_{\partial U} (\phi^x(y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \phi^x(y)}{\partial \nu}) dS_y,$$

因此

$$u(x) = -\int_U (\Phi(x,y) - \phi^x(y))\triangle u(y)dy - \int_{\partial U} u(y)\frac{\partial(\Phi - \phi)}{\partial \nu} dS_y.$$

Definition 9.1.18. *定义相应于U的Green函数*

$$G(x,y) := \Phi(x,y) - \phi^x(y), \quad x, y \in U, x \neq y.$$

注：Green函数$G(x,y)=\Phi(x,y)-\phi^x(y)$只与$U$有关，它常表示为（给定$x\in U$）

$$\begin{cases} -\triangle_y G(x,y)=\delta_x(y), & y\in U,\\ G(x,y)|_{y\in\partial U}=0. \end{cases}$$

Theorem 9.1.19. 设$u\in C^2(\overline{U})$为如下边值问题的解

$$\begin{cases} -\triangle u=f, & in\ U,\\ u=g, & on\ \partial U. \end{cases}$$

则

$$u(x)=\int_U G(x,y)f(y)dy-\int_{\partial U} g(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS_y,\quad x\in U.$$

如果$f=0$，即拉普拉斯方程$Dirichlet$边值问题有$Green$表示

$$u(x)=-\int_{\partial U} g(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS_y,\quad x\in U.$$

注：这里并没有真正证明Green函数，或者是Poission方程Dirichlet边值问题解的存在性，因为其中假设了Laplace方程边值问题的解$\phi^x(y)$的存在性。

而且这里先假定了$u\in C^2(\overline{U})$，然后得到它的Green表示。但我们没有反过来具体验证上述Green表示中定义的$u\in C^2(\overline{U})$并满足边值。

考虑边值问题$\begin{cases} \triangle u=0, & \text{in } U,\\ u=1, & \text{on } \partial U \end{cases}$，由Green表示公式以及$u\equiv 1$为唯一解可知

$$u(x)=-\int_{\partial U}\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS_y=1,\quad x\in U.$$

Theorem 9.1.20. 对任意$x,y\in U, x\neq y$，

$$G(x,y)=G(y,x).$$

证明：定义

$$v(z):=G(x,z),\quad w(z)=G(y,z),\quad z\in U.$$

则

$$\triangle v(z)=0, z\neq x;\quad \triangle w(z)=0, z\neq y$$

并且$v=w=0\quad \text{on } \partial U$。利用Green第二公式

$$\int_V (v\triangle w-w\triangle v)=\int_{\partial V}(v\frac{\partial w}{\partial \nu}-w\frac{\partial v}{\partial \nu})dS$$

于函数v, w及$V = U - [B_\epsilon(x) \cup B_\epsilon(y)], 0 < \epsilon \ll 1$，可得

$$\int_{\partial B_\epsilon(x)} (v\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial v}{\partial \nu})dS_z + \int_{\partial B_\epsilon(y)} (v\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial v}{\partial \nu})dS_z = 0,$$

其中ν为$\partial B_\epsilon(x) \cup \partial B_\epsilon(y)$的单位内法向。注意$v$在$y$附近，$w$在$x$附近光滑，

$$v(z) = G(x,z) = \Phi(x,z) - \phi^x(z), \quad w(z) = G(y,z) = \Phi(y,z) - \phi^y(z),$$

因此当$\epsilon \to 0$，

$$\int_{\partial B_\epsilon(x)} (v\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial v}{\partial \nu})dS_z \to -w(x) = -G(y,x),$$

$$\int_{\partial B_\epsilon(y)} (v\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial v}{\partial \nu})dS_z \to v(y) = G(x,y).$$

因此

$$G(x,y) = G(y,x), \quad x, y \in U, x \neq y.$$

□

Green第二公式

$$\int_U (v\triangle u - u\triangle v) = \int_{\partial U} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})dS.$$

取$v(y) = G(x, y)$，

$$\begin{aligned}\int_{U\setminus \overline{B}_\rho(x)} G(x,y)\triangle u(y)dy &= \int_{\partial U} -u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}dS_y \\ &\quad + \int_{\partial B_\rho(x)} [G(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}]dS_y.\end{aligned}$$

因此，

$$u(x) = -\int_U G(x,y)\triangle u(y)dy - \int_{\partial U} u(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS_y, \quad x \in U.$$

简单区域的Green函数可以具体求出。例如上半空间$\mathbb{R}^n_+$，单位球$B_1(0)$。

例：上半空间$\mathbb{R}^n_+$的Green函数。

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}.$$

根据定义

$$G(x,y) = \Phi(x,y) - \phi^x(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n_+, x \neq y,$$

其中

$$\begin{cases} \triangle_y \phi^x(y) = 0, & y \in \mathbb{R}^n_+ \\ \phi^x(y)|_{y\in\partial\mathbb{R}^n_+} = \Phi(x,y). \end{cases}$$

如果x看作给定参数，$\Phi(x,y)$为x处点源在y处对应的位势。为求解$\phi^x(y)$，考虑在x关于超平面边界$\{x_n = 0\}$的对称点（镜像点）

$$\widetilde{x} = (x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n)$$

放置一个单位点源，它产生的位势为

$$\Phi(\widetilde{x}, y),$$

它关于$y \in \mathbb{R}^n_+$调和，而且当$y \in \partial\mathbb{R}^n_+$时$\Phi(\widetilde{x}, y) = \Phi(x, y)$。因此我们可以选取

$$\phi^x(y) = \Phi(\widetilde{x}, y),$$

从而得到上半空间上的Green函数

$$G(x,y) := \Phi(x,y) - \Phi(\widetilde{x}, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n_+, x \neq y.$$

因此

$$G(x,y)=-\frac{1}{2\pi}(\ln|x-y|-\ln|\widetilde{x}-y|),\quad n=2,$$

$$G(x,y)=\frac{1}{n(n-2)\omega_n}(|x-y|^{2-n}-|\widetilde{x}-y|^{2-n}),\quad n\geq 3,$$

因$|\widetilde{x}-y|=|\widetilde{y}-x|, x,y\in\mathbb{R}^n_+, x\neq y$，特别可直接看到有对称性质$G(x,y)=G(y,x)$。$G(x,y)$关于$y\in\mathbb{R}^n_+-\{x\}$调和，由对称性$x\mapsto G(x,y), x\in\mathbb{R}^n_+-\{y\}$也调和。

可计算

$$\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y)=\frac{-1}{n\omega_n}[\frac{y_n-x_n}{|y-x|^n}-\frac{y_n+x_n}{|y-\widetilde{x}|^n}],$$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)=-\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y)=-\frac{2x_n}{n\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n},\quad y\in\partial\mathbb{R}^n_+.$$

考虑边值问题

$$\begin{cases}\triangle u=0, & \text{in } \mathbb{R}^n_+,\\ u=g, & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+.\end{cases}$$

由拉普拉斯方程Dirichlet边值问题的Green表示公式

$$u(x)=-\int_{\partial U}g(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)dS_y,\quad x\in U,$$

可得Poisson公式

$$u(x)=\frac{2x_n}{n\omega_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\frac{g(y)}{|x-y|^n}dy,\quad x\in\mathbb{R}^n_+.$$

其中

$$K(x,y):=\frac{2x_n}{n\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n},\quad x\in\mathbb{R}^n_+, y\in\partial\mathbb{R}^n_+$$

称为$\mathbb{R}^n_+$上的Possion核。

在边值的一定条件下，可以严格证明Possion公式给出的确实是边值问题的解。

Theorem 9.1.21. *(Poisson's formula for half-space) 设$g\in C(\mathbb{R}^{n-1})\cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$，$u$如上由Poisson公式定义。则*

(1) $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$,

(2) $\triangle u=0$ in $\mathbb{R}^n_+$,

(3) $\lim_{x\in\mathbb{R}^n_+, x\to x^0}u(x)=g(x^0)$, for each point $x^0\in\partial\mathbb{R}^n_+$.

证明：见后面。

例：平面区域$\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|x_1>0,x_2>0\}$的Green函数。

解：镜像法确定

$$\begin{aligned} G(x,y) &= -\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}+\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2+x_2)^2} \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(y_1+x_1)^2+(y_2-x_2)^2}-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(y_1+x_1)^2+(y_2+x_2)^2}. \end{aligned}$$

例：对于$U=B_R(0)\subset\mathbb{R}^n, n\geq 2$，求Green函数。

解：对于$x\in\mathbb{R}^n-\{0\}$，定义其相对于球面$\partial B_R(0)$的对称点

$$\widetilde{x}:=\frac{R^2}{|x|^2}x.$$

特别

$$x\cdot\widetilde{x}=R^2.$$

设$0\neq x\in B_R(0), z\in\partial B_R(0)$，计算

$$\frac{|z-\widetilde{x}|^2}{|z-x|^2}=\frac{|z-\frac{R^2}{|x|^2}x|^2}{|z-x|^2}=\frac{R^2+\frac{R^4}{|x|^2}-2\frac{R^2}{|x|^2}z\cdot x}{R^2+|x|^2-2z\cdot x}=\frac{R^2}{|x|^2}.$$

即

$$\frac{|x|}{R}|z-\widetilde{x}|=|z-x|,\quad z\in\partial B_R(0).$$

根据定义

$$G(x,y)=\Phi(x,y)-\phi^x(y),\quad x,y\in U, x\neq y,$$

其中

$$\begin{cases} \triangle_y\phi^x(y)=0, & y\in U \\ \phi^x(y)|_{y\in\partial U}=\Phi(x,y). \end{cases}$$

因此可选取

$$\phi^x(y)=\Phi(\frac{|x|}{R}|y-\widetilde{x}|),$$

$$G(x,y)=\Phi(|x-y|)-\Phi(\frac{|x|}{R}|y-\widetilde{x}|),\quad \widetilde{x}:=\frac{R^2}{|x|^2}x.$$

可计算得

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi(|y-x|)=-\frac{1}{n\omega_n}\frac{y_i-x_i}{|y-x|^n},$$

注意到对于$|y|=R$，$\frac{|x|}{R}|y-\widetilde{x}|=|y-x|$，类似可得

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi(\frac{|x|}{R}|y-\widetilde{x}|)=-\frac{1}{n\omega_n}\frac{\frac{|x|^2}{R^2}y_i-x_i}{|y-x|^n},$$

因此有

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}=\frac{\partial G}{\partial r}|_{r=R}=\frac{y_i}{R}\frac{\partial G}{\partial y_i}=-\frac{1}{n\omega_n R}\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n}.$$

考虑边值问题

$$\begin{cases}\triangle u=0, & \text{in } B_R(0),\\ u=g, & \text{on } \partial B_R(0).\end{cases}$$

由拉普拉斯方程Dirichlet边值问题的Green表示公式

$$u(x)=-\int_{\partial U} g(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS_y, \quad x\in U,$$

得到Poisson公式

$$u(x)=\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial B_R(0)}\frac{g(y)}{|y-x|^n}dS_y, \quad x\in B_R(0),$$

其中

$$K(x,y):=\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R}\frac{1}{|y-x|^n}=-\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y), \quad x\in x\in B_R(0), y\in \partial B_R(0)$$

称为$B_R(0)$上的Possion核。

二维圆盘$B_R(0)$上Laplace方程Dirichlet边值问题的解的Poisson积分公式：

$$u(r,\theta)=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}d\varphi, \quad r<R.$$

Possion公式在假设$C^2(\overline{U})$解存在的前提下得到了它的表达式。我们可以验证上述Poisson公式给出的解$u\in C^2(B_R(0))\cap C(\overline{B_R(0)})$，满足方程以及边界条件。

Theorem 9.1.22. *设$g\in C(\partial B_R(0))$，u如上由Possion公式定义。则*

(i) $u\in C^\infty(B_R(0)), \triangle u=0 \ in\ B_R(0)$。

(ii) $\lim_{x\in B_R(0), x\to x^0} u(x)=g(x^0), \forall x^0\in \partial B_R(0)$。

§9.1.5 能量方法

能量方法（结合分部积分）是研究偏微分方程的一种基本方法，特别是证明方程解的唯一性、存在性和正则性等方面。以Poisson方程边值问题为例

$$\begin{cases}-\triangle u=f, & \text{in } U,\\ u=g & \text{on } \partial U.\end{cases}$$

首先看能量方法在证明解的唯一性中的应用。

Theorem 9.1.23. 如上*Poisson*方程边值问题至多有一个解$u \in C^2(\overline{U})$。

证明：否则，设$\widetilde{u} \in C^2(\overline{U})$为另一个解，则$w := u - \widetilde{u}$满足$\triangle w = 0, w|_{\partial U} = 0$。因此

$$0 = \int_U -w\triangle w dx = \int_U |Dw|^2 dx - \int_{\partial U} w\frac{\partial w}{\partial \nu} dS = \int_U |Dw|^2 dx.$$

所以$Dw \equiv 0$，又$w|_{\partial U} = 0$，因此$w = u - \widetilde{u} \equiv 0$。 □

许多方程都是某个能量泛函的极值点，所以能量结合变分原理可用来找方程的解。

Theorem 9.1.24. （*Dirichlet*原理）$u \in C^2(\overline{U})$为*Poisson*方程边值问题的解当且仅当

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w],$$

其中$\mathcal{A}$为容许集，I为能量泛函分别定义为

$$\mathcal{A} := \{w \in C^2(\overline{U}) | w = g \quad on\ \partial U\},$$

$$I[w] := \int_U (\frac{1}{2}|Dw|^2 - fw) dx.$$

证明：首先证明方程的解u使得$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]$。任取$w \in \mathcal{A}$，因$(u-w)|_{\partial U} = 0$，分部积分得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U (-\triangle u - f)(u - w) dx \\ &= \int_U [Du \cdot D(u-w) - f(u-w)] dx \\ &= \int_U [|Du|^2 - Du \cdot Dw - fu + fw] dx \\ &\geq \int_U [|Du|^2 - \frac{1}{2}(|Du|^2 + |Dw|^2) - fu + fw] dx, \end{aligned}$$

即

$$\int_U (\frac{1}{2}|Du|^2 - fu) dx \leq \int_U (\frac{1}{2}|Dw|^2 - fw) dx.$$

反过来，设$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]$。设$v \in C_0^\infty(U)$，记

$$I(t) := I[u + tv], \quad t \in \mathbb{R}.$$

因$u+tv\in\mathcal{A}$，又$I[0]\le I[t]$，因此

$$\begin{aligned}0=I'(0) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\int_U[\frac{1}{2}|D(u+tv)|^2-f(u+tv)]dx\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\int_U[\frac{1}{2}|Du|^2+tDu\cdot Dv+\frac{1}{2}t^2|Dv|^2-f(u+tv)]dx\\ &= \int_U[Du\cdot Dv-fv]dx\\ &= \int_U(-\triangle u-f)vdx.\end{aligned}$$

即

$$\int_U(-\triangle u-f)vdx=0,\quad \forall v\in C_0^\infty(U),$$

因此

$$-\triangle u=f.$$

Theorem 9.1.25. *(Poisson's formula for half-space)* 设$g\in C(\mathbb{R}^{n-1})\cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$，$u$如上由$Poisson$公式定义。则

(1) $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$,

(2) $\triangle u=0$ *in* $\mathbb{R}^n_+$,

(3) $\lim_{x\in\mathbb{R}^n_+,x\to x^0}u(x)=g(x^0)$, *for each point* $x^0\in\partial\mathbb{R}^n_+$.

证明: 可直接计算$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}K(x,y)dy=1,x\in\mathbb{R}^n_+$。类似可得若$|g|\le M$，则$|u|\le M$。

由于$x\mapsto G(x,y),x\in\mathbb{R}^n_+-\{y\}$调和，因此

$$x\mapsto-\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y)=K(x,y),\quad x\in\mathbb{R}^n_+,y\in\partial\mathbb{R}^n_+$$

调和。$u(x)$由含参变量积分定义，因$x\mapsto K(x,y),x\ne y$光滑，以及导数$D_x^\alpha K(x,y)$在$y\to\infty$时关于x的一致衰减性质，因此$u\in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$，并且

$$\triangle u(x)=\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\triangle_xK(x,y)g(y)dy=0,\quad x\in\mathbb{R}^n_+.$$

接下来验证（3）：任选$x^0\in\partial\mathbb{R}^n_+,\epsilon>0$。则

$$\begin{aligned}|u(x)-g(x^0)| &= |\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}K(x,y)[g(y)-g(x^0)]dy|\\ &\le \int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap B_\delta(x^0)}K(x,y)|g(y)-g(x^0)|dy\\ &\quad+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+-B_\delta(x^0)}K(x,y)|g(y)-g(x^0)|dy\\ &:= I+J,\end{aligned}$$

其中$\delta>0$使得$|y-x^0|<\delta, y\in\partial\mathbb{R}^n_+$时

$$|g(y)-g(x^0)|<\epsilon,$$

因此

$$I\le\epsilon\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}K(x,y)dy=\epsilon.$$

对于J，需要考察$x\to x^0$，特别$x_n\to 0$时

$$K(x,y)=\frac{2x_n}{n\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n},\quad y\in\mathbb{R}^n_+-B_\delta(x^0).$$

当$|x-x^0|<\frac{\delta}{2}, y\in\mathbb{R}^n_+-B_\delta(x^0)$时，

$$2|y-x|\ge|y-x|+\frac{\delta}{2}\ge|y-x|+|x-x^0|\ge|y-x_0|,$$

因此对于$|x-x^0|<\frac{\delta}{2}$，

$$\begin{aligned}
J &\le 2\|g\|_{L^\infty}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+-B_\delta(x^0)}K(x,y)dy\\
&\le \frac{2^{n+2}\|g\|_{L^\infty}x_n}{n\omega_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+-B_\delta(x^0)}|y-x^0|^{-n}dy\\
&\to 0,\quad x_n\to 0^+.
\end{aligned}$$

所以，对于任意$\epsilon>0$，当$0<x_n<\delta_2(\delta,\epsilon)$时，$J\le\epsilon$。因此，

$$u(x)\to g(x^0),\quad x\to x^0.$$

□

作业：7，8，9，10

§9.2 热方程

（齐次）热方程：

$$u_t - \triangle u = 0,$$

其中未知函数$u : U \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$，$U \subset \mathbb{R}^n$。

（非齐次）热方程：

$$u_t - \triangle u = f,$$

其中$f : U \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$。

除泛定方程，定解问题还需附加相应初始条件和边界条件。

§9.2.1 基本解

先找基本解：待定

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v(\frac{x}{t^\beta}), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

其中α, β为常数，$v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。如上形式的函数$u(x,t)$等价于要求

$$u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t).$$

事实上，一方面对于如上形式的u我们有

$$\lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t) = \lambda^\alpha \frac{1}{(\lambda t)^\alpha} v(\frac{\lambda^\beta x}{(\lambda t)^\beta}) = \frac{1}{t^\alpha} v(\frac{x}{t^\beta}) = u(x,t),$$

另一方面如果$u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$，特别选取$\lambda = t^{-1}$，则

$$u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t) = \frac{1}{t^\alpha} u(\frac{x}{t^\beta}, 1) := \frac{1}{t^\alpha} v(\frac{x}{t^\beta}).$$

令

$$y = \frac{x}{t^\beta},$$

由$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v(\frac{x}{t^\beta})$得

$$u_t = -\alpha t^{-\alpha-1} v(y) - \beta t^{-\alpha-1} y \cdot Dv(y),$$

$$\triangle u = t^{-\alpha-2\beta} \triangle v(y).$$

代入热方程，并选取$\beta = \frac{1}{2}$，

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \triangle v = 0.$$

选取$v(y)=w(|y|), r=|y|$，则

$$\alpha w+\frac{1}{2}rw'+w''+\frac{n-1}{r}w'=0.$$

选取$\alpha=\frac{n}{2}$，从而

$$(r^{n-1}w')'+\frac{1}{2}(r^n w)'=0.$$

因此

$$r^{n-1}w'+\frac{1}{2}r^n w=a,$$

设$\lim_{r\to\infty}w=\lim_{r\to\infty}w'=0$，则$a=0$。从而

$$w'=-\frac{1}{2}rw,$$

$$w=be^{-\frac{r^2}{4}}=be^{-\frac{|y|^2}{4}}=be^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

$$u=\frac{b}{t^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Definition 9.2.1. 热方程的基本解（热核）

$$\Phi(x,t):=\begin{cases}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & x\in\mathbb{R}^n, t>0,\\ 0, \quad x\in\mathbb{R}^n, t>0\end{cases}$$

注：对任意$x\neq 0$，$\lim_{t\to 0^+}\Phi(x,t)=0$。因此$(x=0,t=0)$是唯一奇点。容易验证：

$$\Phi_t=-\frac{n}{2t}\Phi+\frac{|x|^2}{4t^2}\Phi,$$

$$\Phi_i=-\frac{x_i}{2t}\Phi,\quad \triangle\Phi=-\frac{n}{2t}\Phi+\frac{|x|^2}{4t^2}\Phi.$$

基本解对应的是在$t=0$时刻$x=0$位置的瞬时热源产生的温度场，它满足

$$\begin{cases}\Phi_t-\triangle\Phi=0, & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ \Phi=\delta_0, & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}.\end{cases}$$

通过（复数形式）Fourier变换求解上述初值问题得到的正是$\Phi(x,t)$。

这里常数选取使得对任意$t>0$，令$z=\frac{x}{2\sqrt{t}}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x,t)dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}dx=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|z|^2}dz\\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}}\Pi_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}e^{-z_i^2}dz_i=1.\end{aligned}$$

利用基本解可得到如下初值问题解的表示公式

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Theorem 9.2.2. 设$g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$，则

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, t>0$$

满足

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

(ii) $u_t - \triangle u = 0$

(iii) $\lim_{x\in\mathbb{R}^n, t>0, (x,t)\to(x^0,0)} u(x,t) = g(x^0), \forall x^0 \in \mathbb{R}^n.$

证明：因$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$无穷次可微，并且导数在$\mathbb{R}^n \times [\delta,\infty), \forall \delta > 0$ 上一致有界，因此$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$。特别

$$u_t - \triangle u = \int_{\mathbb{R}^n} [(\Phi_t - \triangle_x \Phi)(x-y,t)]g(y)dy = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t>0.$$

任给$x_0 \in \mathbb{R}^n, \epsilon > 0$，选取$\delta > 0$使得当$|y-x^0| < \delta$时，

$$|g(y) - g(x^0)| < \epsilon.$$

因此，

$$\begin{aligned} |u(x,t) - g(x^0)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)[g(y)-g(x^0)]dy| \\ &\le \int_{B_\delta(x^0)} \Phi(x-y,t)|g(y)-g(x^0)|dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n - B_\delta(x^0)} \Phi(x-y,t)|g(y)-g(x^0)|dy \\ &:= I + J, \end{aligned}$$

这里

$$I \le \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)dy = \epsilon.$$

当$|x-x^0| \le \frac{\delta}{2}, |y-x^0| \ge \delta$时

$$2|y-x| \ge |y-x| + \frac{\delta}{2} \ge |y-x| + |x-x^0| \ge |y-x^0|,$$

因此，令$z=\frac{y-x^0}{\sqrt{t}}$

$$\begin{aligned}
J &\leq 2\|g\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n-B_\delta(x^0)}\Phi(x-y,t)dy \\
&\leq \frac{C}{t^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n-B_\delta(x^0)}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy \leq \frac{C}{t^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n-B_\delta(x^0)}e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}}dy \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n-B_{\frac{\delta}{\sqrt{t}}}(0)}e^{-\frac{|z|^2}{16}}dz\to 0,\quad t\to 0^+.
\end{aligned}$$

因此当$|x-x^0|<\frac{\delta}{2}$，$t>0$充分小时，$|u(x,t)-g(x^0)|<2\epsilon$。 □

注：这里初值$g\in C(\mathbb{R}^n)$，但$u\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$。

无限传播速度：设$g\in C_0(\mathbb{R}^n), g\geq 0, g\neq 0$，则$u>0,\forall(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$。这与波动方程的有限传播速度不同。

非齐次热方程、Duhamel（冲量）原理：考虑初值问题

$$\begin{cases} u_t(x,t)-\triangle u(x,t)=f(x,t), & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty), \\ u=0 \quad \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}. \end{cases}$$

这里非齐次项$f(x,t)$对应热源密度。事实上

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\triangle u+g(x,t).$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\triangle u+f(x,t),\quad a=\sqrt{k/c\rho}, f=g/(c\rho).$$

Duhamel原理：非齐次方程的解可以通过叠加（积分）得到。令

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;s)ds.$$

则

$$u_t(x,t)=v(x,t;t)+\int_0^t v_t(x,t;s)ds,$$

$$\triangle_x u(x,t)=\int_0^t\triangle_x v(x,t;s)ds\triangle_x,$$

由$u_t(x,t)-\triangle u(x,t)=f(x,t)$，$v(x,t;s)$应满足

$$f(x,t)=v(x,t;t)+\int_0^t(v_t-\triangle_x v)(x,t;s)ds.$$

因此要求$v(x,t;s)$满足

$$v(x,t;s=t)=f(x,t); \quad v_t(x,t;s)=\triangle_x v(x,t;s), t>s.$$

因此，任意给定$s\geq 0$，$v(x,t;s)$可由如下初值问题确定

$$\begin{cases} v_t(x,t;s)-\triangle_x v(x,t;s)=0, & \text{in } \mathbb{R}^n\times(s,\infty), \\ v(x,t;s)=f(x,s) & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=s\}. \end{cases}$$

事实上，由如上定义的$v(x,t;s), t\geq s$以及$u(x,t):=\int_0^t v(x,t;s)ds$，我们有（形式上）

$$u(x,0)=\int_0^0 v(x,0;0)dx=0,$$

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= v(x,t;t)+\int_0^t v_t(x,t;s)ds=f(x,t)+\int_0^t \triangle_x v(x,t;s)ds \\ &= f(x,t)+\triangle_x\int_0^t v(x,t;s)ds=\triangle u(x,t)+f(x,t). \end{aligned}$$

$s\geq 0$固定，将$t=s$看作初始时刻，$f(x,s)$看作初值。即令

$$\widetilde{t}:=t-s, \quad w(x,\widetilde{t}):=v(x,t;s),$$

则$w(x,\widetilde{t})$满足

$$\begin{cases} w_{\widetilde{t}}(x,\widetilde{t})-\triangle w(x,\widetilde{t})=0, & \widetilde{t}>0 \\ w(x,\widetilde{t}=0)=v(x,t=s;s)=f(x,s). \end{cases}$$

因此$v(x,t;s)$的解为

$$v(x,t;s)=w(x,\widetilde{t})=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,\widetilde{t})f(y,s)dy=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)f(y,s)dy, \quad \text{in } \mathbb{R}^n\times(s,\infty).$$

因此，得到形式解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}f(y,s)dyds, \quad x\in\mathbb{R}^n, t>0. \end{aligned}$$

Theorem 9.2.3. 设$f\in C_1^2(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$并具有紧支集，$u$如上。则

(i) $u\in C_1^2(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$

(ii) $u_t(x,t)-\triangle u(x,t)=f(x,t), \quad x\in\mathbb{R}^n, t>0$

(iii) $\lim_{x\in\mathbb{R}^n,t>0,(x,t)\to(x^0,0)} u(x,t)=0, \quad x^0\in\mathbb{R}^n.$

证明：这对应之前Possion方程解的卷积公式的证明过程。因为$\Phi(x-y,t-s)$在$(s=t,y=x)$处奇异，不能直接对$u(x,t)$的定义式直接求导，需要利用卷积的对称性质转化到对f求导，再分部积分到基本解上。

变量代换得

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)f(x-y,t-s)dyds.$$

因此对$t>0$

$$u_t(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)f_t(x-y,t-s)dyds+\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,t)f(x-y,0)dy,$$

$$u_{ij}(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)f_{ij}(x-y,t-s)dyds,$$

以及

$$\begin{aligned}u_t(x,t)-\triangle u(x,t) &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)[(\partial_t-\triangle_x)f(x-y,t-s)]dyds\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,t)f(x-y,0)dy\\ &= \int_\epsilon^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)[(-\partial_s-\triangle_y)f(x-y,t-s)]dyds\\ &\quad+\int_0^\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)[(-\partial_s-\triangle_y)f(x-y,t-s)]dyds\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,t)f(x-y,0)dy\\ &:= I_\epsilon+J_\epsilon+K.\end{aligned}$$

其中$s\in(0,\epsilon)$这一部分，即J_ϵ，没有进行分部积分，而是直接估计

$$|J_\epsilon|\le(\|f_t\|_{L^\infty}+\|D^2f\|_{L^\infty})\int_0^\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,s)dyds\le C\epsilon,$$

I_ϵ部分分部积分得

$$\begin{aligned}I_\epsilon &= \int_\epsilon^t\int_{\mathbb{R}^n}[(\partial_s-\triangle_y)\Phi(y,s)]f(x-y,t-s)dyds\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,\epsilon)f(x-y,t-\epsilon)dy-\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,t)f(x-y,0)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,\epsilon)f(x-y,t-\epsilon)dy-K.\end{aligned}$$

因此，与上一定理(iii)的证明类似可得

$$u_t(x,t)-\triangle u(x,t)=\lim_{\epsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y,\epsilon)f(x-y,t-\epsilon)dy=f(x,t),\quad x\in\mathbb{R}^n,t>0.$$

最后，由定义

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds$$

可知

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty}\le t\|f\|_{L^\infty}\to 0.$$

□

由叠加原理，非齐次热方程初值问题

$$\begin{cases} u_t-\triangle u=f, & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty)\\ u=g, & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$$

有解

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)g(y)dy+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds.$$

§9.2.2 能量方法

设$U\subset\mathbb{R}^n$为有界开集，$\partial U\in C^1$。分别定义抛物柱体和抛物边界为

$$U_T:=U\times(0,T],\quad \Gamma_T:=\overline{U_T}-U_T.$$

利用能量方法证明解的唯一性：

Theorem 9.2.4. *如下初边值问题至多有一个解*$u\in C_1^2(\overline{U_T})$

$$\begin{cases} u_t-\triangle u=f & \textit{in } U_T,\\ u=g & \textit{on } \Gamma_T.\end{cases}$$

证明：设$\tilde{u}$为另一个解，则$w:=u-\tilde{u}$满足

$$\begin{cases} w_t-\triangle w=0 & \text{in } U_T,\\ w=0 & \text{on } \Gamma_T.\end{cases}$$

定义能量

$$e(t):=\int_U w^2(x,t)dx,\quad 0\le t\le T.$$

则由$w|_{\partial U}=0$，分部积分得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e(t) &= 2\int_U ww_tdx=2\int_U w\triangle wdx\\ &= -2\int_U|Dw|^2dx\le 0,\end{aligned}$$

因此$e(t)=e(0)=0, t\in[0,T]$，$w=u-\widetilde{u}\equiv 0$ in U_T。 □

热方程解的反向唯一性：

Theorem 9.2.5. *热方程$u_t-\triangle u=f$的满足边值$u=g$ on $\partial U\times[0,T]$，以及$u(x,T)=h(x)$至多有一个解$u\in C^2(\overline{U_T})$。*

证明：设$\widetilde{u}$为另一个解，则$w(x,t):=u-\widetilde{u}$满足

$$w(x,T)=0,\quad w|_{\partial U\times[0,T]}=w_t|_{\partial U\times[0,T]}=0.$$

同样定义能量

$$e(t):=\int_U w^2(x,t)dx,\quad 0\le t\le T.$$

则

$$\dot{e}(t):=\frac{d}{dt}e(t)=2\int_U w\triangle w dx=-2\int_U|Dw|^2dx,$$

$$\begin{aligned}\ddot{e}(t):=\frac{d^2}{dt^2}e(t) &= -4\int_U Dw\cdot Dw_t dx=4\int_U\triangle w w_t dx\\ &= 4\int_U(\triangle w)^2dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\dot{e}(t)]^2 &= 4[\int_U w\triangle w dx]^2\\ &\le 4\int_U w^2dx\int_U(\triangle w)^2dx\\ &= e(t)\ddot{e}(t).\end{aligned}$$

已知$e(T)=0$。只要证对所有$t\in[0,T]$都有$e(t)=0$。否则，可设有$[t_1,t_2]\in[0,T]$使得

$$e(t)>0, \text{for } t_1\le t<t_2;\quad e(t_2)=0.$$

定义

$$f(t)=\log e(t),\quad t\in[t_1,t_2),$$

则

$$\ddot{f}(t)=\frac{\ddot{e}(t)}{e(t)}-\frac{\dot{e}(t)^2}{e(t)^2}\ge 0,\quad t\in[t_1,t_2).$$

即$f(t)$为凸函数，因此对于$\tau\in(0,1), t\in(t_1,t_2)$

$$f((1-\tau)t_1+\tau t)\le(1-\tau)f(t_1)+\tau f(t),$$

$$e((1-\tau)t_1+\tau t)\le e(t_1)^{1-\tau}e(t)^{\tau},$$

$$e((1-\tau)t_1+\tau t_2)\le e(t_1)^{1-\tau}e(t_2)^{\tau}=0,\quad \tau\in(0,1).$$

因此$e(t)=0, t\in[t_1,t_2]$，与假设矛盾。 □

作业：13，14

§9.2.3 热方程平均值公式及应用：最大值原理、解的唯一性

设$U \subset \mathbb{R}^n$为有界开集。分别定义抛物柱体和抛物边界为

$$U_T := U \times (0,T], \quad \Gamma_T := \overline{U_T} - U_T.$$

调和函数平均值公式中所用的球体可看作

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n | \Phi(|x-y|) \geq \Phi(r)\}.$$

对于热方程，$x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, r > 0$，我们定义"heat ball"

$$E(x,t;r) := \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} | s \leq t, \Phi(x-y,t-s) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq \frac{1}{r^n}\}.$$

这里取$\frac{1}{r^n}$仅为记号方便。

例：$(x=0, t=0)$情形，$s \leq 0$

$$1 \geq e^{\frac{|y|^2}{4s}} \geq \frac{1}{r^n}(-4\pi s)^{\frac{n}{2}},$$

因此$0 \leq (-4\pi s)^{\frac{n}{2}} \leq r^n$，

$$|y|^2 \leq 4s \ln[\frac{1}{r^n}(-4\pi s)^{\frac{n}{2}}].$$

为利用热方程、基本解以及分部积分得到平均值公式，一个自然的出发点是考虑

$$\int\int_{E(x,t;r)} (u_s - \triangle u)(y,s) \ln[r^n \Phi(x-y,t-s)] dyds.$$

分部积分后出现的项包括

$$-u[\ln \Phi]_s = u(y,s)\frac{\Phi_t}{\Phi}(x-y,t-s),$$

$$-u\triangle_y[\ln \Phi] = -u(y,s)[\frac{\triangle_x \Phi}{\Phi} - \frac{|D_x\Phi|^2}{\Phi^2}](x-y,t-s),$$

特别将出现

$$\int\int_{E(x,t;r)} u(y,s)|D_x \log \Phi(x-y,t-s)|^2 dyds,$$

即

$$\int\int_{E(x,t;r)} u(y,s)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds.$$

为了求上式关于r的导数，令$y - x = r(z-x), t - s = r^2(t-\tau)$，则

$$\frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq \frac{1}{r^n} \Leftrightarrow \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{n/2}} e^{-\frac{|x-z|^2}{4(t-\tau)}} \geq 1,$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int\int_{E(x,t;r)} u(y,s)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds \\
= &\int\int_{E(x,t;1)} u(x+r(z-x),t-r^2(t-\tau))\frac{r^2|x-z|^2}{r^4(t-\tau)^2}r^{n+2}dzd\tau \\
= &\ r^n\int\int_{E(x,t;1)} u(x+r(z-x),t-r^2(t-\tau))\frac{|x-z|^2}{(t-\tau)^2}dzd\tau.
\end{aligned}$$

从而对任意$r>0$，

$$\frac{1}{r^n}\int\int_{E(x,t;r)} u(y,s)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds = \int\int_{E(x,t;1)} u(x+r(z-x),t-r^2(t-\tau))\frac{|x-z|^2}{(t-\tau)^2}dzd\tau.$$

事实上热方程的平均值公式的表达式为

$$u(x,t)=\frac{1}{4r^n}\int\int_{E(x,t;r)} u(y,s)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds, \quad \forall E(x,t;r)\subset U_T.$$

Theorem 9.2.6. 设$u\in C_1^2(U_T)$为热方程$u_t-\triangle u=0$的解。则对任意$E(x,t;r)\subset U_T$，

$$u(x,t)=\frac{1}{4r^n}\int\int_{E(x,t;r)} u(y,s)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds.$$

证明：平移时间空间坐标使得$x=0,t=0$。记$E(r)=E(0,0;r)$。定义

$$\phi(r):=\frac{1}{r^n}\int\int_{E(r)} u(y,s)\frac{|y|^2}{s^2}dyds.$$

我们将证明$\phi(r)$与r无关。为了对$\phi(r)$关于r求导，令$y=rz, s=r^2\tau$，同上可得

$$\phi(r)=\int\int_{E(1)} u(rz,r^2\tau)\frac{|z|^2}{\tau^2}dzd\tau.$$

如果$\phi(r)$与r无关，则由$\phi(r)$的定义

$$\phi(r)=\lim_{r\to 0}\phi(r)=u(0,0)\lim_{r\to 0}[\frac{1}{r^n}\int\int_{E(r)}\frac{|y|^2}{s^2}dyds]=u(0,0)\int\int_{E(1)}\frac{|z|^2}{\tau^2}dzd\tau=4u(0,0).$$

证明$\phi(r)$与r无关：首先，

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \frac{d}{dr}\int\int_{E(1)} u(rz,r^2\tau)\frac{|z|^2}{\tau^2}dzd\tau \\
&= \int\int_{E(1)}[u_{y_i}z_i\frac{|z|^2}{\tau^2}+u_s 2r\tau\frac{|z|^2}{\tau^2}]dzd\tau \\
&= \int\int_{E(r)}[u_{y_i}\frac{y_i}{r}\frac{|y|^2/r^2}{s^2/r^4}+u_s 2r\frac{|y|^2/r^2}{s/r^2}]r^{-n-2}dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)}[u_{y_i}y_i\frac{|y|^2}{s^2}+2u_s\frac{|y|^2}{s}]dyds \\
&:= A+B.
\end{aligned}$$

定义

$$\psi := \log[r^n\Phi(y,-s)] = \log[r^n \frac{1}{(-4\pi s)^{n/2}} e^{\frac{|y|^2}{4s}}] = n\log r - \frac{n}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s}.$$

因为$\Phi(y,-s) = r^{-n}$ on $\partial E(r)$，因此$\psi = 0$ on $\partial E(r)$。可计算

$$\psi_{y_i} = \frac{y_i}{2s}, \quad 2y_i\psi_{y_i} = \frac{|y|^2}{s}, \quad \psi_s = -\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2},$$

$$div(u_s y_i \psi \partial_{y_i}) = nu_s\psi + u_{sy_i}y_i\psi + u_s y_i \psi_{y_i},$$

因此利用Stokes定理，并继续关于s分部积分可得

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} 4u_s y_i \psi_{y_i} dyds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} [4nu_s\psi + 4u_{sy_i}y_i\psi] dyds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} [-4nu_s\psi + 4u_{y_i}y_i\psi_s] dyds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} [-4nu_s\psi + 4u_{y_i}y_i(-\frac{n}{2s})] dyds - A, \end{aligned}$$

从而利用热方程、分部积分、并利用$\psi_{y_i} = \frac{y_i}{2s}$可得

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= A + B = \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} [-4n\triangle_y u\psi - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i] dyds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} [4nu_{y_i}\psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i] dyds = 0. \end{aligned}$$

□

极值原理与唯一性：利用热方程平均值公式证明最大值原理、解的唯一性。作业16中，将利用解在最大值点的导数的符号来证明极值原理。

Theorem 9.2.7. 设U连通，$u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$在$U_T$上满足热方程$u_t - \triangle u = 0$。则有

(1) 极大值原理：$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$.

(2) 强极大值原理：若存在$(x_0,t_0) \in U_T$使得$u(x_0,t_0) = \max_{\overline{U_T}} u$，则$u$在$\overline{U_{t_0}}$上为常值函数。

注：t_0之后可以通过改变边值降低温度。

证明：设有一点$(x_0,t_0)\in U_T$使得$u(x_0,t_0)=M:=\max_{\overline{U_T}}u$。取充分小$r>0$使得$E(x_0,t_0;r)\subset U_T$。因此由平均值公式

$$\begin{aligned} M &= u(x_0,t_0)=\frac{1}{4r^n}\int\int_{E(x_0,t_0;r)}u(y,s)\frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}dyds \\ &\leq M\frac{1}{4r^n}\int\int_{E(x_0,t_0;r)}\frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}dyds=M, \end{aligned}$$

等号取到，因此$u(y,s)=M,\forall(y,s)\in E(x_0,t_0;r)$。

设$(y_0,s_0)\in U_T,s_0<t_0$，连接(x_0,t_0)和(y_0,s_0)的线段$L\subset U_T$。接下来说明线段L上$u\equiv M$。否则，

$$r_0:=\min\{s\geq s_0|u(x,t)=M\quad\text{for all points }(x,t)\in L,s\leq t\leq t_0\}>s_0$$

并且$u(z_0,r_0)=M$，其中$(z_0,r_0)\in L$。然而同样由平均值公式，对充分小的$r>0$，在$E(z_0,r_0;r)$上$u\equiv M$，而另一方面存在充分小的$\sigma>0$使得$L\cap\{r_0-\sigma\leq t\leq r_0\}\subset E(z_0,r_0;r)$，这与$r_0$的定义矛盾。从而$r_0=s_0$，线段$L$上$u\equiv M$。

最后，考虑任意$(x,t)\in U_T,t\in[0,t_0)$。存在包含于U中的折线连接x_0到x，记为$x_0x_1\cdots x_{m-1}x$。再选取$t_0>t_1>\cdots>t_m=t$，于是连接(x_{k-1},t_{k-1})到$(x_k,t_k)(k=1,2,\cdots,m)$的线段都在$U_T$中，而且在每一条线段上$u\equiv M$，从而$u(x,t)=M$。 □

强极大值原理的推论：无穷传播速度与解的唯一性。

设$U\subset\mathbb{R}^n$为有界连通闭集。考虑如下热方程初边值问题的解$u\in C_1^2(U_T)\cap C(\overline{U_T})$

$$\begin{cases} u_t-\triangle u=0, & \text{in } U_T \\ u=0, & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g, & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

其中$g\geq 0,g\in C_0(U)$并且有一点严格大于零。则由强极值原理，u在$\overline{U_T}$上的最小值为零，而且在内部不能取到，因此在U_T上$u>0$。

Theorem 9.2.8. 设$g\in C(\Gamma_T),f\in C(U_T)$。则初边值问题

$$\begin{cases} u_t-\triangle u=f, & \textit{in } U_T, \\ u=g, & \textit{on } \Gamma_T. \end{cases}$$

至多有一个解$u\in C_1^2(U_T)\cap C(\overline{U_T})$。

证明：设$\tilde{u}$为另一个解，则$w:=u-\tilde{u}$满足（齐次）热方程，并且$w|_{\Gamma_T}=0$，因此由极值原理$w\equiv 0$。 □

解的正则性（内部正则性、边界正则性）、导数估计、存在性将在偏微分方程II中利用更一般的方法对更一般的方程进行讨论。

作业：16，17

考试范围：

一、【数学物理方程，季孝达等】中第二章分离变量法，第三章3.1、3.2（3.2.3不要求）、3.3Legendre多项式

二、【PDE，Evans】中第二章2.2、2.3。